

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

В. М. Онищенко

РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНОЙ ДИАГРАММЫ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО
ВИНТА ТРАНСПОРТНОГО ВЕРТОЛЕТА

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

В. М. Онищенко

РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНОЙ ДИАГРАММЫ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО
ВИНТА ТРАНСПОРТНОГО ВЕРТОЛЕТА

Учебное пособие

Харьков «ХАИ» 2017

В. М. Онищенко

РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНОЙ ДИАГРАММЫ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО
ВИНТА ТРАНСПОРТНОГО ВЕРТОЛЕТА

2017

УДК 629.735.33.025.015(075.8)

ББК 39.53я7

О-59

Розглянуто методи розрахунку власних коливань лопаті несучого гвинта транспортного вертольота. На основі створених математичних моделей (ММ) динаміки лопаті вертольота подано приклади числового розрахунку на ЕОМ ізольованих згинальних і крутних, а також зв'язаних згинально-крутних коливань лопаті. Отримано форми і частоти власних коливань і на їхній основі побудовано резонансні діаграми лопаті з використанням моделей різного рівня. Показано використання резонансних діаграм у процесі проектування вертольота з метою недопущення резонансів лопаті в експлуатаційному діапазоні частот обертання несучого гвинта.

Для студентів, які вивчають дисципліни «Теорія механічних коливань» і «Аеропружність», а також при виконанні курсового проекту з дисципліни «Розрахунки на міцність ЛА».

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Ю. С. Вороб'єв,
канд. техн. наук, доц. А. Г. Андреев

Онищенко, В. М.

О-59 Расчет резонансной диаграммы лопасти несущего винта транспортного вертолета [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. М. Онищенко. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т», 2017. – 106 с.

Рассмотрены методы расчета собственных колебаний лопасти несущего винта транспортного вертолета. На основе созданных математических моделей (ММ) динамики лопасти вертолета показаны примеры численного расчета на ЭВМ изолированных изгибных и крутильных, а также связанных изгибно-крутильных колебаний лопасти. Получены формы и частоты собственных колебаний и на их основе построены резонансные диаграммы лопасти с использованием моделей различного уровня. Показано использование резонансных диаграмм в процессе проектирования вертолета в целях недопущения резонансов лопасти в эксплуатационном диапазоне частот вращения несущего винта.

Для студентов, изучающих дисциплины «Теория механических колебаний» и «Аэроупругость», а также при выполнении курсового проекта по дисциплине «Расчеты на прочность ЛА».

Ил. 78. Табл. 1. Библиогр.: 10 назв.

УДК 629.735.33.025.015(075.8)

ББК 39.53я7

© Онищенко В. М., 2017

© Национальный аэрокосмический
университет им. Н. Е. Жуковского

«Харьковский авиационный институт», 2017

ВВЕДЕНИЕ

Прочность вертолета обеспечивается циклом теоретических, расчетных и экспериментальных работ, которые начинают выполнять на стадии эскизного проектирования и продолжают до снятия с эксплуатации. Прочность регламентируется авиационными правилами (АП). Для решения задач по обеспечению прочности вертолета, как показал опыт их создания, следует использовать как расчетные, так и экспериментальные методы.

Для проектирования ЛА по условиям прочности характерным является комплексный подход, одновременно учитывающий ряд прочностных требований к конструкции: обеспечение статической прочности неповрежденной конструкции, нужного уровня остаточной прочности при наличии определенных допустимых повреждений, ресурса конструкции по условиям сопротивления усталости, требований к жесткости и устойчивости конструкции исходя из обеспечения безопасности по условиям статической и динамической аэроупругости.

Необходимо предотвратить разрушение или необратимое изменение формы элементов вертолета, появление недопустимо больших вибраций и развитие колебательной неустойчивости конструкции, а также ограничить в определенных пределах перемещение элементов конструкции. Очевидный, на первый взгляд, путь обеспечения прочности посредством увеличения площадей поперечных сечений элементов конструкций в некоторых случаях неэффективен. Поиск оптимальных решений в задачах динамики и прочности вертолета – долгий и непростой процесс. Следует понимать физические основы функционирования и нагружения вертолета, знать основные факторы, влияющие на прочность.

На ранних стадиях проектирования вертолета стремятся реализовать такие упругомассовые характеристики конструкции, при которых будут обеспечены ее аэроупругая устойчивость и прочность. Эту проблему решают в комплексе с другими задачами с помощью системы расчета, которая наряду с требованиями к аэродинамическим характеристикам, характеристикам динамики, управления и прочности учитывает и требования к характеристикам аэроупругости. С этой же целью используют имеющийся опыт и статистические данные, позволяющие оценить аэроупругую устойчивость проектируемого типа ЛА.

В ходе работ принимают во внимание и по мере возможности применяют некоторые общие методы и средства профилактики и «лечения» ЛА от опасных явлений аэроупругости: повышение жесткости всех элементов конструкции при неизменном соотношении этих жесткостей; изменение соотношения жесткостей, улучшающие характеристики аэроупругости.

В процессе разработки новых образцов авиационной техники возникает необходимость обоснования предлагаемых решений, сокращения сроков создания и снижения степени их технического риска. Это невозможно без постоянного совершенствования методов расчета, более глубокой и оперативной проработки закладываемых в них физических моделей при максимально полном учете специфики работы изделия в различных условиях эксплуатации.

Из-за ограниченных возможностей наземных экспериментальных установок и летного эксперимента очень важно развитие направления, ориентированного на создание и опережающее функционирование математических моделей (ММ) объектов – их математических дублеров.

Теоретической базой разработки, создания и совершенствования техники все в большей степени становится аэроупругость – научно-техническая проблема комплексного изучения процесса функционирования объекта в реальных условиях полета. Разрешить эту задачу в полном объеме можно с помощью нестационарной аэродинамики, теории упругости, теории колебаний и устойчивости упругих систем, уравнений динамики полета.

ММ аэроупругости используют на этапах проектирования, эксплуатации и модернизации ЛА. Следует подчеркнуть, что опережающее функционирование математических моделей объектов возможно только при постоянной корректировке модели на основе данных физического моделирования системы и летного эксперимента.

На стадии разработки технического предложения и эскизного проектирования при выборе схемы вертолета и его основных параметров ММ аэроупругости вертолета имеют большое значение. Созданная на основе опыта проектирования и расчетов предшествующих вертолетов ММ позволяет исследовать особенности динамики и нагружения конструкции, условия ее устойчивости.

На стадии технического проектирования основная задача – выбор параметров конструкции. Подробные расчеты также следует выполнять с помощью математических моделей, которые постоянно развиваются и совершенствуются по мере проведения экспериментальных исследований.

При доводке опытного образца и запуске его в серийное производство продолжается уточнение ММ. Ошибка в окончательной оценке прочностных характеристик конструкции на этом этапе недопустима.

Разработка методов и способов расчета динамических характеристик конструкции вертолета занимает важное место в процессе проектирования ЛА. Динамические характеристики конструкции (формы и частоты собственных колебаний) – это базовая, исходная информация, необходимая для формирования расчетных моделей аэроупругости и исследования динамики и нагружения

конструкции в процессе эксплуатации. Знание собственных частот конструкции дает возможность исключить резонансы в процессе эксплуатации, а формы собственных колебаний позволяют представить деформацию конструкции, имеющей бесконечное число степеней свободы, в виде разложения по заданным формам.

В пособии рассмотрены ММ расчета собственных колебаний лопастей несущего винта (НВ), приведены точные решения для простых и идеализированных конструкций, а также показано применение приближенных способов для расчета свободных колебаний конструкций с реальным распределением жесткостей и масс. Используются изолированные изгибные, крутильные и совместные изгибно-крутильные колебания лопасти НВ. Приведен один из наиболее опасных примеров нагружения конструкции в процессе свободных колебаний лопастей при их ударе об упор горизонтального шарнира (центробежный ограничитель свеса) на земле. Проанализированы резонансные диаграммы лопастей НВ в целях исключения резонансов в процессе эксплуатации вертолета. Выполнены параметрические исследования влияния ряда конструктивных параметров на вид резонансной диаграммы НВ.

1. ЛЕТНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ ВЕРТОЛЕТА И НЕСУЩЕГО ВИНТА

Для решения задач динамики и прочности вертолета требуется огромное количество исходной информации, связанной с геометрическими, массово-инерционными характеристиками и жесткостными свойствами элементов вертолета. Выберем в качестве вертолета-прототипа Ми-8.

На рис. 1 показан общий вид вертолета, выполненного по классической трехшарнирной схеме крепления лопастей к втулке НВ.

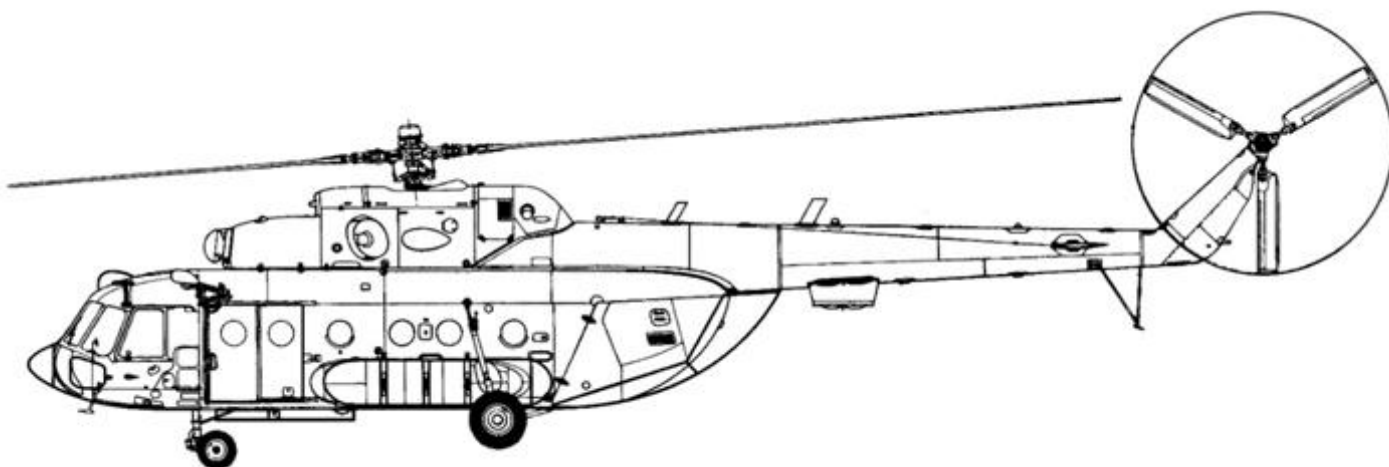


Рис. 1. Общий вид вертолета

Устройство втулки несущего винта показано на рис. 2. На втулке установлены пять маятниковых гасителей, которые снижают вибрации вертолета в горизонтальной плоскости.

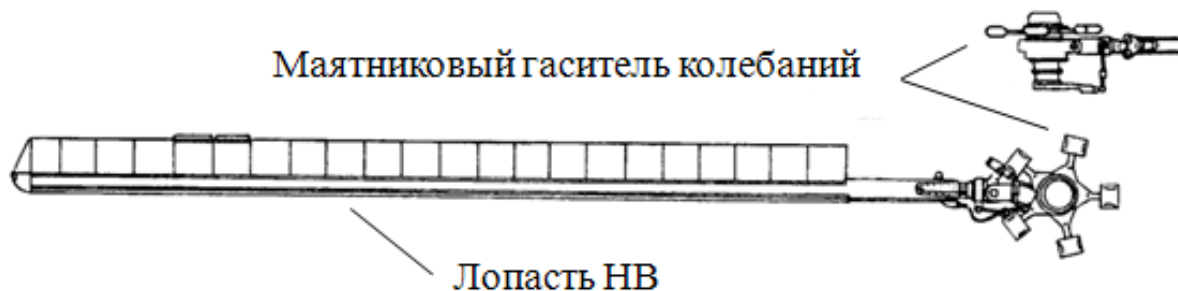


Рис. 2. Несущий винт и маятниковый гаситель колебаний

Вертолет спроектирован по одновинтовой схеме с пятилопастным несущим и трехлопастным рулевым винтами. На вертолете установлены два турбовинтовых двигателя ТВЗ-117 со взлетной мощностью 1500 л. с. каждый, что обеспечивает возможность посадки вертолета при отказе одного из двигателей.

Далее приведены общие данные вертолета.

Массовые данные

Взлетная масса, кг:	
нормальная.....	11100
максимальная.....	12000
Масса втулки, кг.....	610
Масса комплекта лопастей, кг.....	700

Летные данные

Скорость полета, км / ч:	
максимальная, по прибору при нормальной взлетной массе.....	250
максимальная, при максимальной взлетной массе.....	230
минимальная, при горизонтальном полете (по прибору).....	60
крейсерская (по прибору), на высоте 500 м.....	220
экономическая (по прибору).....	120
Высота полета, м:	
максимальная, при нормальной взлетной массе.....	4500
максимально допустимая.....	6000

Геометрические данные и общая характеристика несущего винта

Диаметр, м.....	21,288
Число лопастей.....	5
Площадь, ометаемая винтом, м ²	355,7

Коэффициент заполнения.....	0,0777
Максимально возможный угол взмаха.....	25°±30'
Удельная нагрузка на ометаемую винтом площадь, кгс / см ²	31-33,8
Хорда лопасти, м.....	0,52
Профиль лопасти.....	NACA-23012
Угол установки лопастей (по УШВ):	
минимальный.....	1°
максимальный.....	14°±30'
Разнос горизонтального шарнира, мм.....	220
Разнос вертикального шарнира, мм.....	507
Коэффициент компенсатора взмаха.....	0,5
Коэффициент демпфирования ВШ, Н·м·с/град.....	2·10 ⁴
Угол наклона оси НВ вперед.....	4°30'

Несущий винт предназначен для создания подъемной силы на всех режимах полета, движущей силы, а также моментов продольного и поперечного управления вертолетом.

На рис. 3 подробно показано расположение горизонтального шарнира (ГШ), имеющего смещение $b_{ГШ}$ относительно радиального направления, и поворот ξ_{cp} , равный среднему углу поворота лопасти относительно вертикального шарнира (ВШ) в полете. На плече l_n уравнивается шарнирный момент лопасти.

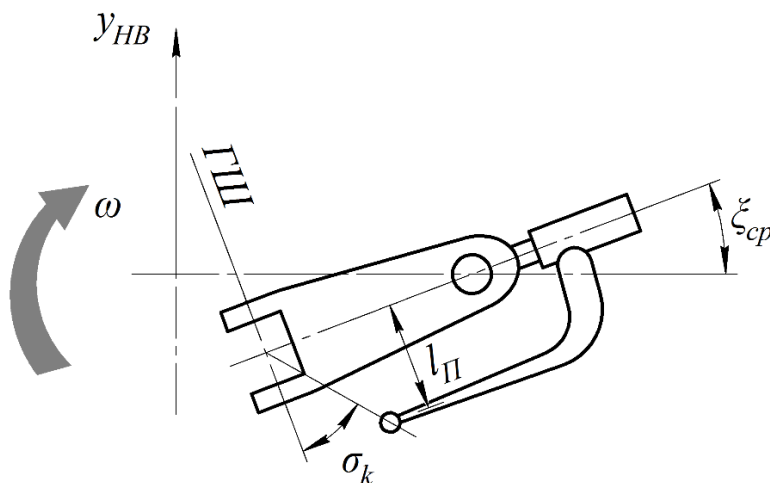


Рис. 3. Схема размещения горизонтального шарнира

На рис. 4 показана схема НВ вертолета, состоящего из втулки и пяти лопастей, которые крепятся к втулке НВ с помощью горизонтальных и вертикальных шарниров. Угол установки лопастей изменяется посредством осевых шарниров (ОШ). Поводок каждой лопасти связан с подвижной тарелкой автомата перекоса, благодаря чему можно изменять общий и циклический шаги

лопастей. На рис. 4 указаны разности горизонтального $a_{ГШ}$ и вертикального $a_{ВШ}$ шарниров. Демпфер ВШ служит для демпфирования колебаний лопасти вокруг ВШ и предотвращает колебания типа «земной резонанс». Для снижения вибрации фюзеляжа на втулке НВ установлены пять маятниковых гасителей колебаний (см. рис. 2). Лопасть крепят к корпусу ОШ с помощью гребенки.

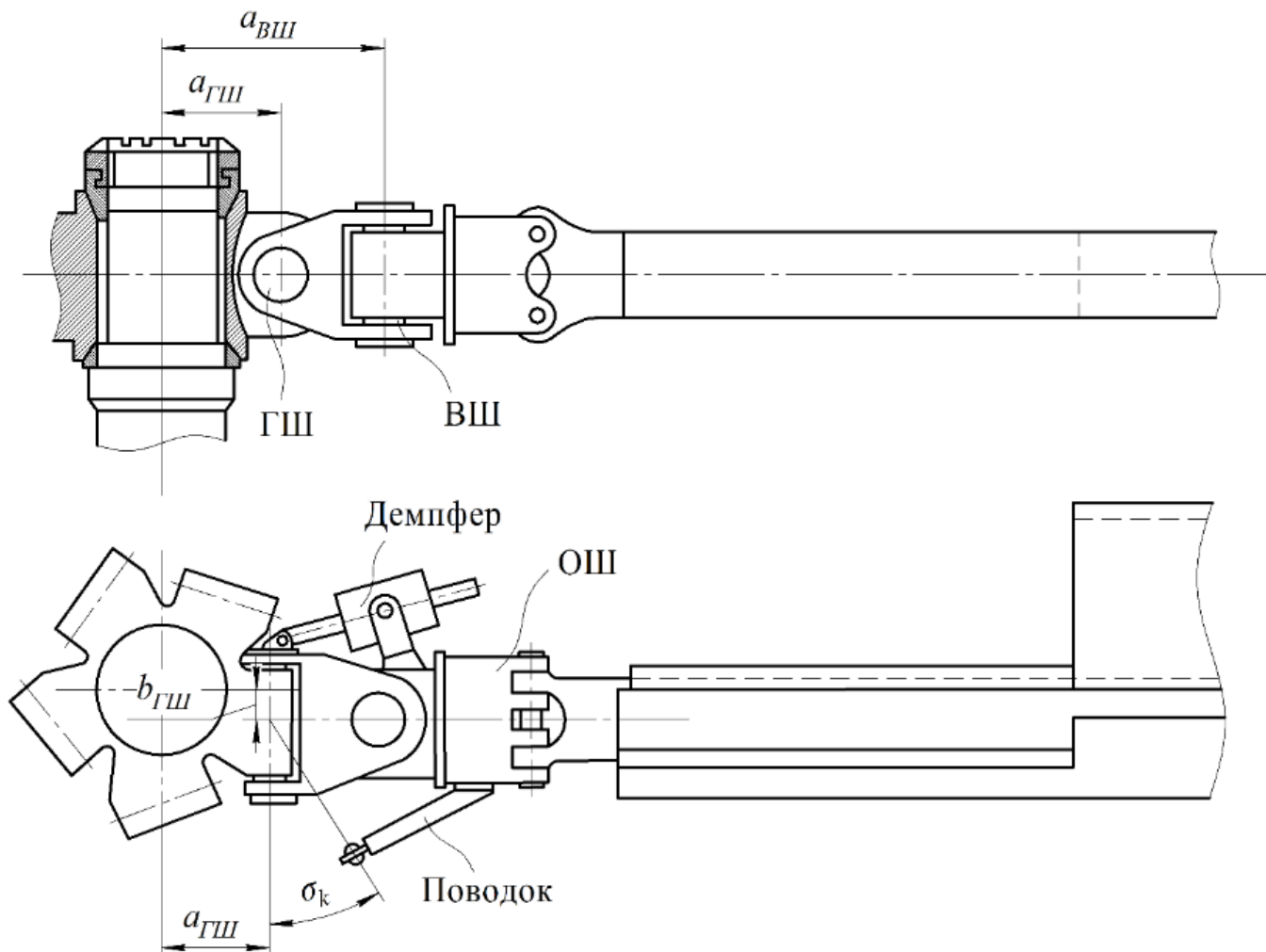


Рис. 4. Схема втулки несущего винта

На рис. 5 показана форма лопасти в плане с указанием номеров хвостовых отсеков.

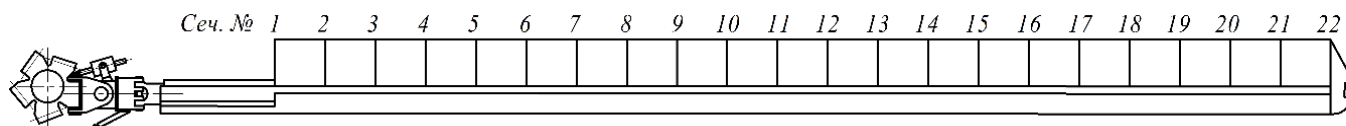


Рис. 5. Форма лопасти в плане

Контуры поперечных сечений лопасти образованы профилем НАСА-23012. Лопасть имеет прямоугольную форму в плане с хордой 520 мм, которая хотя и не

оптимальна в аспекте аэродинамики, но предпочтительна с точки зрения технологии изготовления.

Лопать цельнометаллической конструкции состоит из лонжерона, хвостового отсека, противофлаттерных грузов и концевой части лопасти (рис. 6). Основным силовым элементом лопасти – лонжерон, представляющий собой пустотелую балку с внутренним постоянным контуром. Наружная поверхность лонжерона обработана в соответствии с теоретическим контуром профиля лопасти. Он изготовлен путем механической обработки пустотелой заготовки, полученной прессованием из алюминиевого сплава.

Хвостовые отсеки по бокам опираются на нервюры и прикреплены к лонжерону.

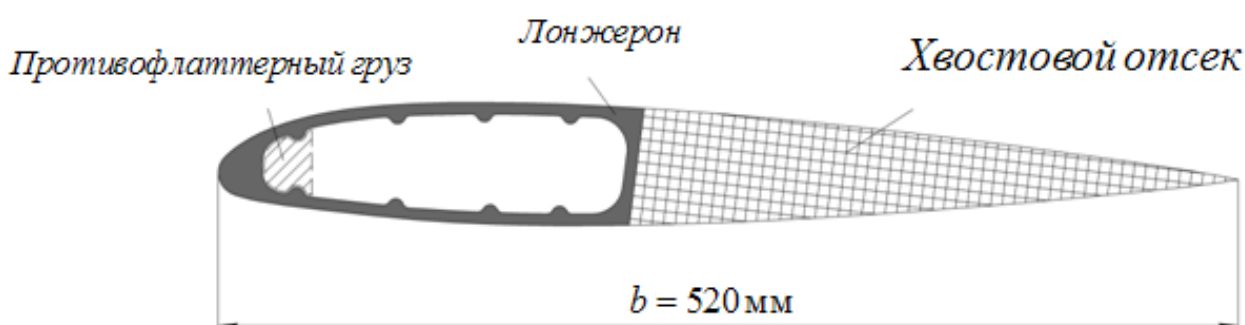


Рис. 6. Поперечное сечение лопасти

Верхняя и нижняя полки лонжерона на внутренней поверхности имеют плавные ребра – утолщения. Стальной комлевой наконечник, предназначенный для крепления лопасти к втулке, крепят к лонжерону с помощью болтов.

Для получения нужной поперечной центровки лопасти, что необходимо для увеличения критической скорости флаттера, в носке лонжерона между отсеками 18 и 22 (рис. 6) установлены противофлаттерные грузы, состоящие из восьми отдельных стальных брусков длиной 400 мм и массой до 1 кг каждый. Хвостовые отсеки имеют сотовый наполнитель, в конце усилены концевым стрингером, а по их торцам расположены бортовые нервюры.

Основные геометрические и кинематические параметры лопасти

Основные геометрические параметры, необходимые для расчета свободных колебаний и аэродинамических характеристик лопасти, – радиус сечения, хорда профиля, угол установки и геометрическая крутка (рис. 7).

Радиус сечения лопасти r определяют как расстояние от оси вращения НВ до рассматриваемого сечения. Часто удобно использовать относительный радиус $\bar{r} = r/R$, изменяющийся от нуля до единицы.

Угол установки φ измеряют между хордой сечения лопасти и плоскостью вращения НВ. Угол установки сечения на характерном относительном радиусе $\bar{r} = 0,7R$ при отсутствии махового движения лопасти и нейтральном положении органов управления НВ считают углом установки всей лопасти и вместе с тем общим шагом НВ, обозначаемым φ_0 .

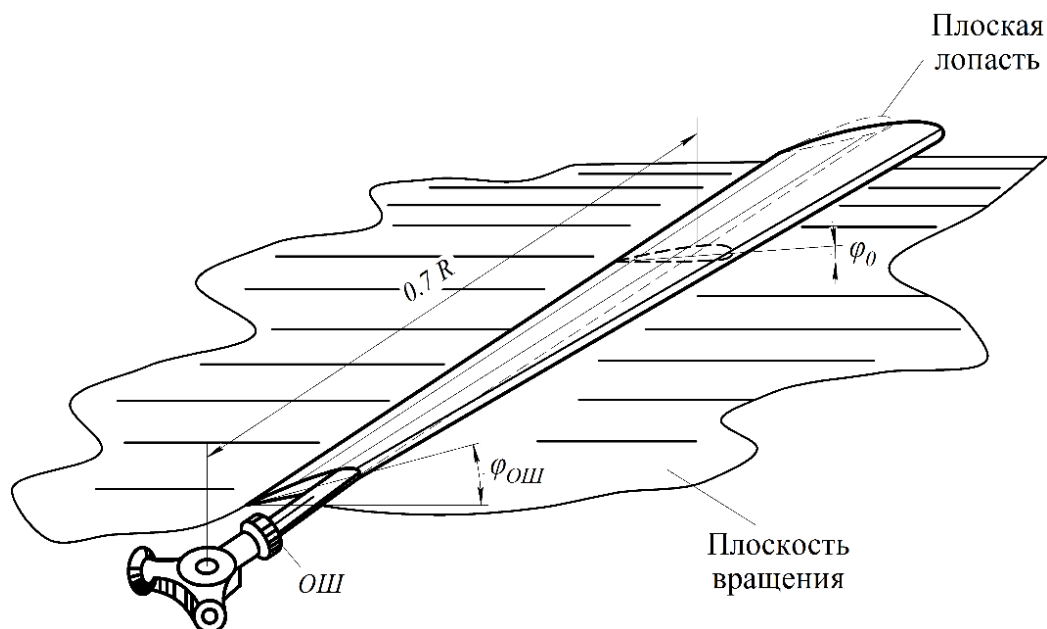


Рис. 7. Геометрические параметры лопасти

Геометрическая крутка осуществляется изменением угла установки сечений по радиусу лопасти, т. е. конструктивным поворотом сечений относительно друг друга на угол $\Delta\varphi$ (рис. 8). Для обеспечения оптимальных условий работы лопасти НВ в режиме горизонтального полета необходимо уменьшать углы установки ее сечений от комля к концу по достаточно сложному закону, что вызывает затруднения в изготовлении такой лопасти. Поэтому на серийных вертолетах применяют лопасти с линейной геометрической круткой.

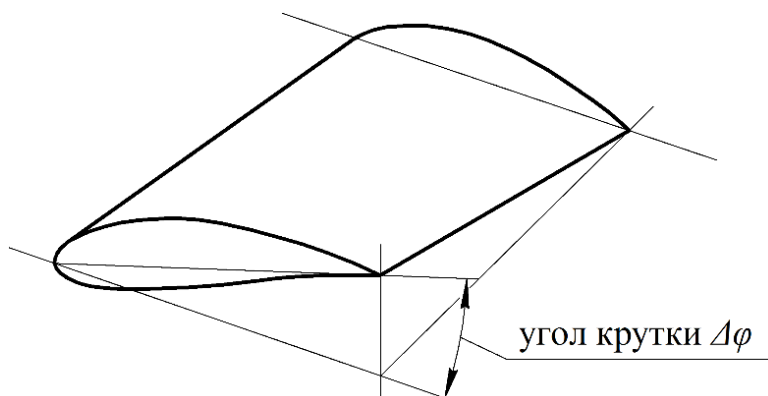


Рис. 8. Геометрическая крутка лопасти

Основные кинематические параметры несущего винта: частота или угловая скорость вращения НВ, углы азимутального положения лопасти и углы взмаха и качания лопасти.

Частота вращения n – число оборотов НВ в секунду. В аэродинамике вертолета обычно рассматривают не частоту, а угловую скорость вращения несущего винта, равную $\omega = 2\pi n = 20,1$ рад/с. Окружная скорость конца лопасти $\omega R = 223$ м/с, а число Маха для концевое сечения на уровне земли $M_0 = \frac{\omega R}{a_0} = 0,66$.

Угол азимутального положения ψ измеряют по направлению вращения НВ между продольной осью лопасти и проекцией вектора скорости набегающего потока на плоскость вращения НВ (рис. 9). При полете вертолета без скольжения угол ψ отсчитывают от положения лопасти вдоль хвостовой балки. На рис. 9 ось x совпадает с проекцией вектора скорости вертолета на плоскость НВ.

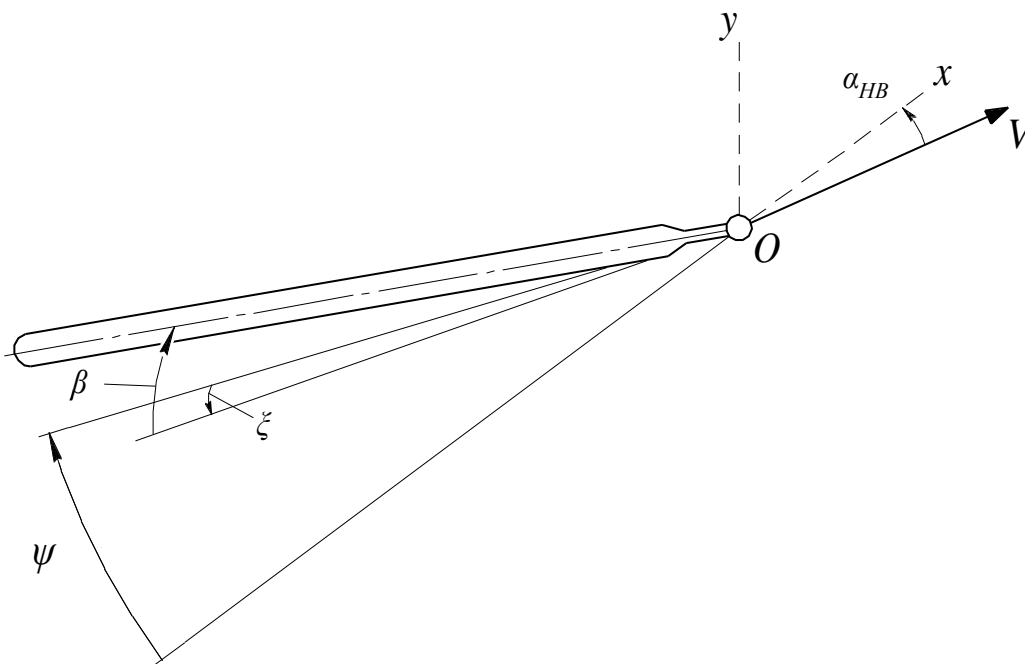


Рис. 9. Угловые координаты, определяющие положение лопасти

Лопать называется опережающей (наступающей), если $0^\circ < \psi < 180^\circ$ и отстающей (отступающей), если $180^\circ < \psi < 360^\circ$. Угол взмаха β определяет угловое перемещение лопасти в горизонтальном шарнире относительно конструктивной плоскости вращения. Угол качания ξ характеризует угловое перемещение лопасти в вертикальном шарнире.

Компенсатор взмаха предназначен для изменения угла установки лопасти в зависимости от ее угла взмаха. На рис. 10 изображена схема работы компенсатора взмаха. Вследствие взмаха лопасти автоматически изменяется ее угол установки

(при неизменном положении вертикальной тяги, прикрепленной к поводку лопасти), следовательно, существует кинематическая связь в управлении углом установки лопасти, предназначенная для уменьшения амплитуды маховых колебаний лопасти на режимах кривой обдувки. Такая кинематическая связь достигается смещением точки крепления рычага поворота лопасти относительно осевого шарнира на расстояние l_n и угол σ_k (см. рис. 3). Благодаря этому при маховом движении лопасти одновременно изменяется угол ее установки, который связан с углом взмаха таким образом:

$$\varphi = \varphi_0 - \nu\beta, \quad (1)$$

где φ_0 – угол установки, задаваемый отклонением органов управления;

ν – коэффициент компенсатора взмаха;

β – угол взмаха лопасти относительно плоскости вращения НВ.

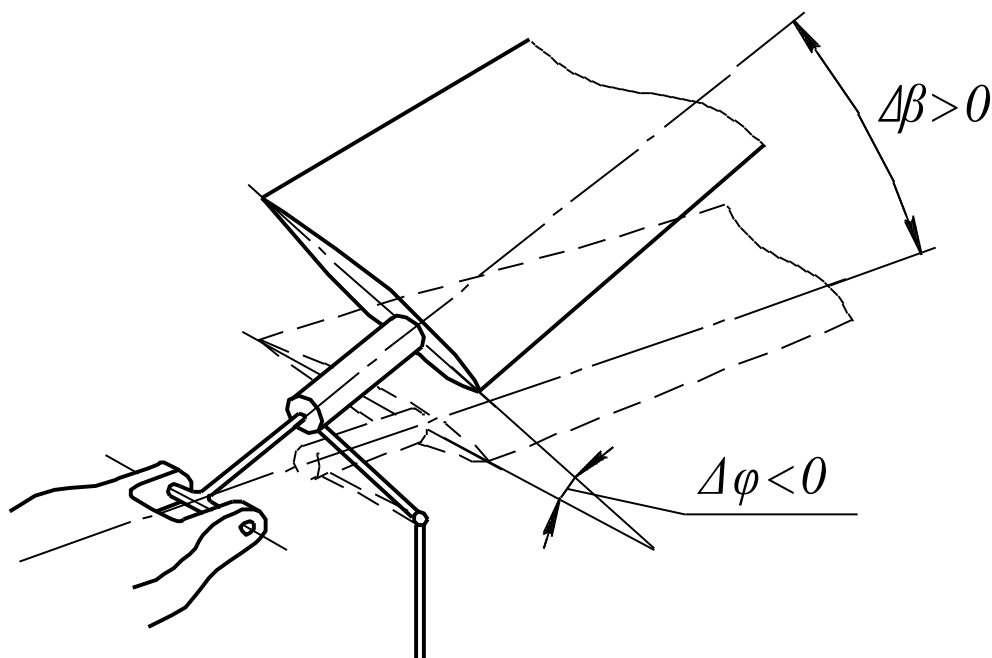


Рис. 10. Схема работы механизма компенсации взмаха

Массово-инерционные характеристики лопасти

Распределение массы и моментов инерции лопасти имеет большое влияние на динамические характеристики. Изменения погонной массы $m_{пог}$ вдоль оси жесткости и массового момента инерции $I_{пог}$ лопасти относительно оси жесткости показаны на рис. 11, 12. Сложный характер их распределения связан с усилением конструкции в районе комлевых участков лопасти, размещением противофлаттерных грузов и хвостовых отсеков.

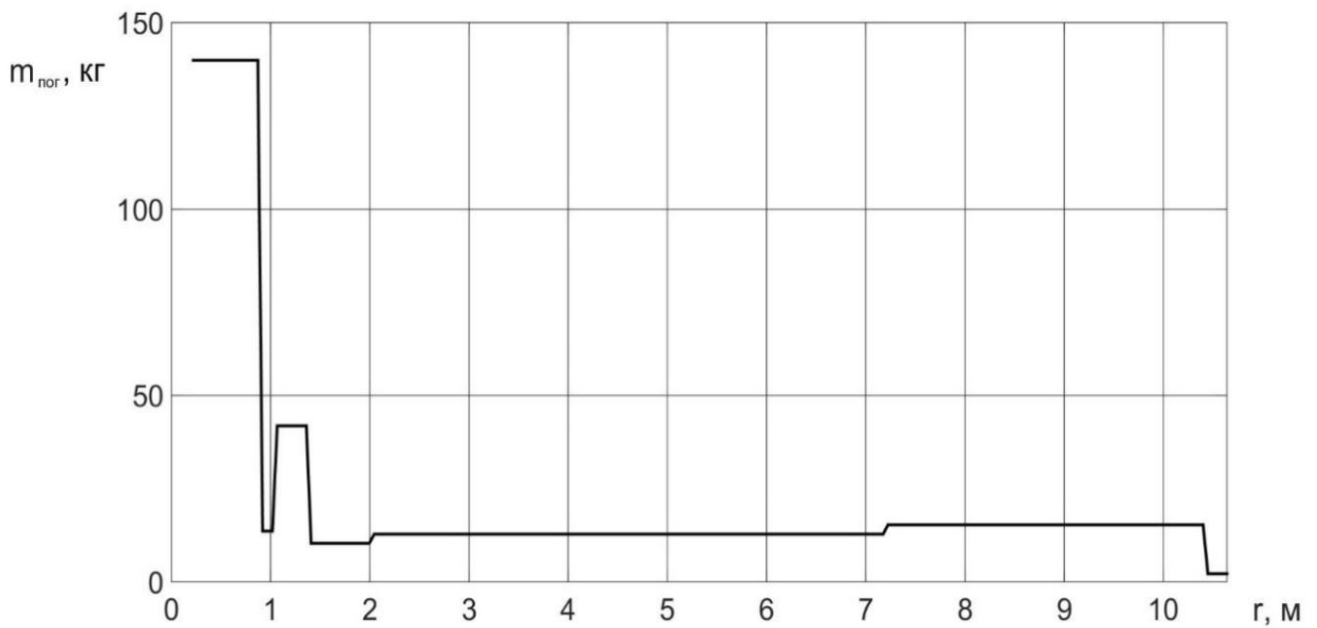


Рис. 11. Изменение погонной массы

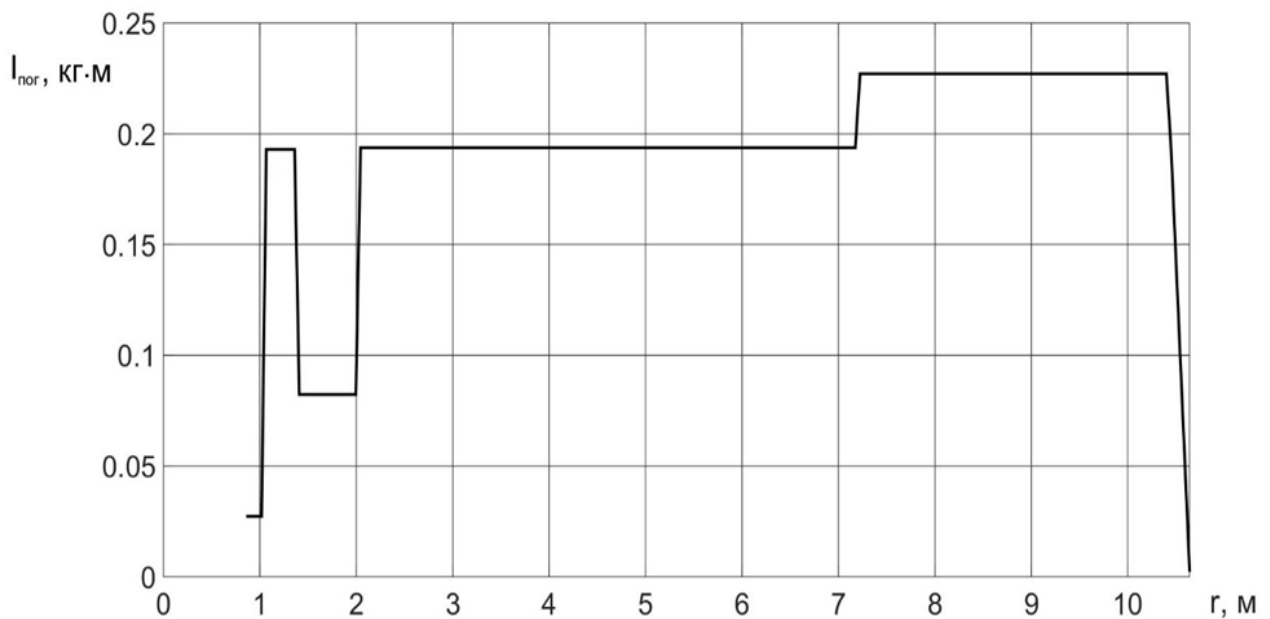


Рис. 12. Изменение погонного момента инерции

На рис. 13 показаны сечение лонжерона лопасти в регулярной зоне, положения центров масс, центра жесткости и ориентация главных центральных моментов инерции, а также угол $\alpha_{ГЛ}$ между хордой профиля и одной из главных центральных осей. Положение центра масс указано для контура лонжерона ($ЦМ_{Л}$), всего сечения лопасти без противоблательного груза ($ЦМ_{сеч}$) и с ним ($ЦМ_{ПФ}$).

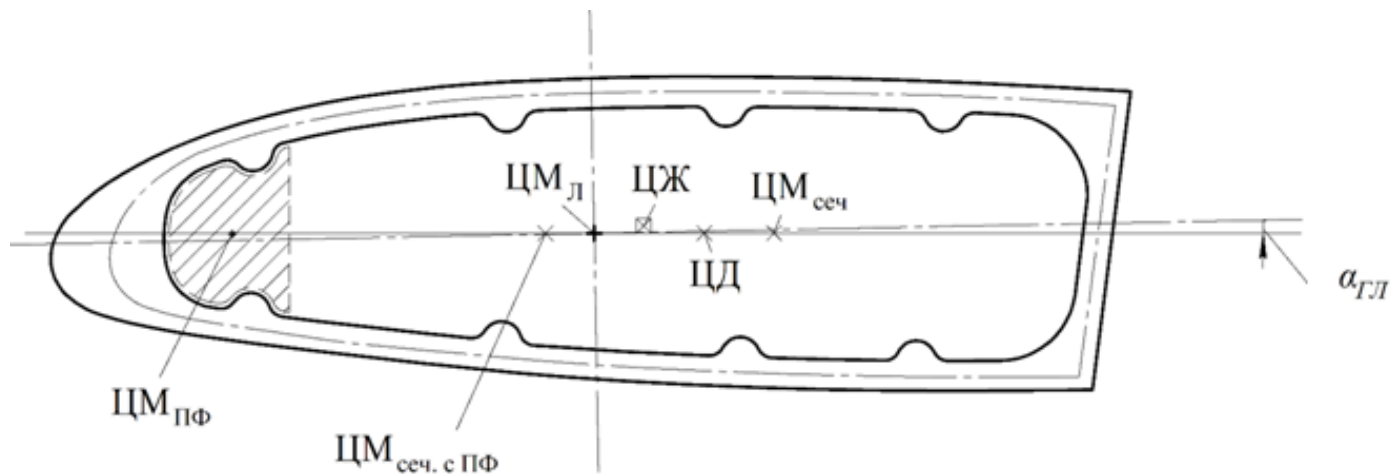


Рис. 13. Расположение центров масс, жесткости и давления относительно главных центральных осей

На рис. 14 показано взаимное расположение линий центров масс и оси жесткости (ОЖ) вдоль лопасти. Следует отметить, что центр жесткости (ЦЖ) практически совпадает с осью ОШ. Положение центра масс резко изменяется в местах расположения противофлаттерных грузов.

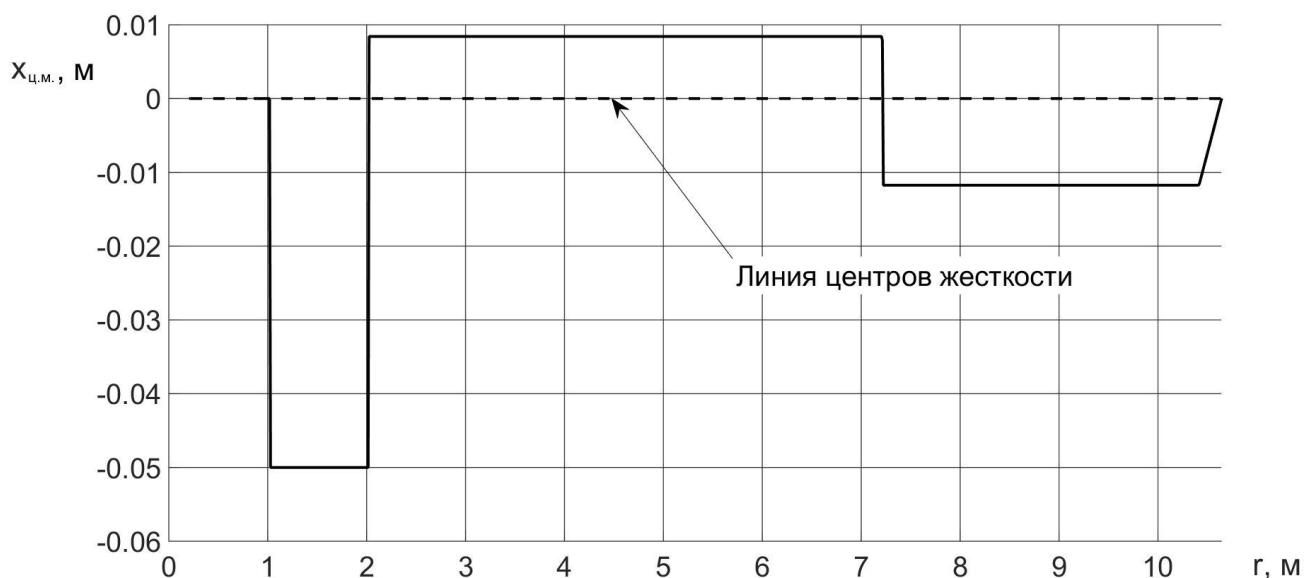


Рис.14. Изменение положения центра масс по размаху лопасти

2. ТРЕБОВАНИЯ НОРМ ПРОЧНОСТИ К ЛОПАСТИ НВ

Требования к прочности вертолета ввиду их важности задают согласно международным стандартам по обеспечению качества серий ISO-9000, ISO-2000, международным нормам ICAO, а также национальным законам FAR, CS, АПУ и АП.

Вертолет представляет собой аэромеханическую систему со сложным распределением масс и жесткостей, большим количеством вращающихся элементов, идеально несбалансированных и работающих в сильно возмущенном несимметричном воздушном потоке.

Для агрегатов вертолета в связи с различным характером их нагружения определяющими являются различные показатели прочности:

– для НВ и РВ, включая лопасти, втулки и часть системы управления (СУ) между лопастями и бустерами, – усталость и динамическая устойчивость;

– для фюзеляжа, крыла, поверхностей управления, шасси и СУ от рычагов до бустеров – статическая прочность;

– для подредукторной рамы – усталость и статическая прочность.

Лопасти винтов – это самые нагруженные части вертолета. Косая обдувка лопастей приводит к постоянному воздействию нестационарной аэродинамической нагрузки. В конструкции возбуждаются колебания различной природы. Наличие большого количества степеней свободы конструкции и подводимая к ней энергия способствуют появлению вибрации и разных видов неустойчивости. Поэтому для вертолетов характерным является широкий комплекс динамических прочностных задач, подлежащих исследованию.

В горизонтальном полете лопасти постоянно совершают вынужденные колебания, могут подвергаться многочисленным формам флаттера – неустойчивым и нарастающим колебаниям лопастей винта при частоте вращения и скорости полета, достигших некоторых определенных критических значений (критической частоты вращения и скорости флаттера).

Вертолету присущ так называемый земной резонанс. Из-за возмущений лопасти несущего винта совершают колебания в плоскости вращения. Центр тяжести винта при этом движется по замкнутой кривой с некоторой частотой. Если эта частота близка к частоте колебаний вертолета на шасси, то возникает земной резонанс. В полете возможен воздушный резонанс, если частота колебаний фюзеляжа совпадает с частотой движения центра масс винта.

В трансмиссии вертолета возможно появление в валах недопустимо больших изгибных и крутильных колебаний и даже потеря их устойчивости. Переменный характер нагружения конструкции вызывает накопление усталостных повреждений и быстрое расходование ее ресурса.

Динамические задачи аэроупругости решают, как правило, в два этапа. На первом (вспомогательном) этапе определяют формы и частоты собственных колебаний конструкции без потока, в пустоте. На втором – решают основную задачу по расчету динамики движения, а в качестве обобщенных координатных функций используют найденные на первом этапе формы колебаний. Одним из

преимуществ применения форм собственных колебаний является то, что их можно сравнить с экспериментальными результатами, полученными при резонансных (частотных) испытаниях, и тем самым корректировать принятую динамическую схему.

Динамические нагрузки, возбуждаемые несущим винтом и другими агрегатами, передаются на вертолет, агрегаты привода винта и могут привести к уменьшению их выносливости и ресурса. По статистике значительная доля происшествий связана с неисправностями несущей системы и агрегатов привода винтов вертолета. Обеспечение прочности и аэроупругой устойчивости вертолета в процессе его проектирования и испытаний – важная и сложная задача, так как его конструкция должна удовлетворять требованиям высокой безопасности при минимальных массах силовых элементов.

В общей постановке надо исследовать вертолет без разделения его на отдельные агрегаты. Ввиду сложности объекта большое практическое значение имеют методы выделения и отдельного анализа отдельных частей задачи с последующим учетом опущенных связей. Таким образом, актуальна задача разработки полных и упрощенных ММ аэроупругости вертолета.

В теории аэроупругости разработаны теоретические и экспериментальные методы обеспечения безопасности ЛА от явлений аэроупругости на базе разложения деформаций в ряд по формам собственных колебаний или другим координатным функциям (метод Бубнова – Галеркина), а также с помощью различных дискретных методов, например метод конечных элементов.

Расчет лопасти на прочность включает в себя определение постоянных и переменных напряжений во всех точках конструкции лопасти в различных условиях нагружения. Наиболее опасные условия нагружения выделяются как случаи, расчетные для прочности конструкции.

Измерения напряжений в полете показывают, что лопасти вертолета испытывают значительные переменные нагрузки на режимах двух различных типов.

К первому типу относятся режимы полета на малых скоростях, когда скорость полета составляет 3...8 % от концевой скорости лопасти. На этих режимах полета наблюдается резкое возрастание амплитуд изгибных колебаний лопастей, соответственно увеличиваются и переменные напряжения.

Такой диапазон скоростей полета вертолет использует при разгоне, горизонтальном полете с установившейся малой скоростью и на режиме торможения. Обычно наибольшие переменные напряжения возникают на режиме торможения. Значительные по величине напряжения могут возникать также и на режиме крутого снижения с малой горизонтальной скоростью.

По условиям нагружения конструкции полеты на малых скоростях – это, как правило, кратковременные режимы полета, во всяком случае для вертолетов, выполняющих транспортные работы. Однако из-за больших напряжений часто именно эти режимы и определяют ресурс лопасти по условиям выносливости.

Ко второму типу режимов относятся полеты на больших скоростях. Это прежде всего полеты на крейсерской и максимальной скоростях. Полет при крейсерской скорости – обычно наиболее продолжительный режим и поэтому вносит в конструкцию значительную усталостную повреждаемость.

Резкое увеличение переменных напряжений на малых скоростях объясняется значительной неравномерностью поля индуктивных скоростей, возникающего на этих режимах в потоке, протекающем через несущий винт. К тому же по своей абсолютной величине индуктивные скорости на этих режимах достигают наибольших значений по сравнению со всеми другими режимами полета. Поэтому их влияние на величину напряжений на малых скоростях полета существенно возрастает. Переменное поле индуктивных скоростей приводит к возникновению переменных аэродинамических нагрузок на лопасть. Под действием этих нагрузок лопасть совершает изгибные колебания, поэтому в ней и появляются значительные переменные напряжения.

На больших скоростях полета переменные аэродинамические нагрузки возникают главным образом вследствие пульсации относительной скорости потока и изменения углов атаки сечений лопасти по азимуту несущего винта. Переменное поле индуктивных скоростей на этих режимах слабо сказывается на величинах аэродинамической нагрузки.

При расчете на прочность необходимо рассмотреть случай возможной в полете раскрутки несущего винта, когда значительно возрастают центробежные силы. При этом увеличиваются средние напряжения, действующие в лопасти.

Знание форм и частот собственных колебаний лопастей позволяет решать задачи расчета динамической неустойчивости конструкции, свободных и вынужденных колебаний лопасти в различных условиях эксплуатации и оценить нагруженность конструкции.

3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАСТЕЙ НЕСУЩЕГО ВИНТА

3.1. Допущения при расчетах динамических характеристик лопасти

Обычно лопасть вертолета проектируют таким образом, что главные моменты инерции ее сечений существенно различаются по величине. Лопасть можно представить в виде растянутого центробежными силами стержня, каждый

участок его обладает различными жесткостями в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Чтобы охарактеризовать эти направления через ось стержня, по направлению главных осей проводят плоскости, которые называются плоскостями наибольшей и наименьшей жесткостей (рис. 15).

Часто для создания аэродинамической крутки лопасти закручивают не только каркас, образующий ее внешнюю поверхность, но и лонжерон лопасти. В этом случае направления главных упругих осей сечения изменяются по длине лопасти, и она становится геометрически закрученным стержнем. В других случаях аэродинамическую крутку выполняют путем поворота каркаса лопасти относительно лонжерона.

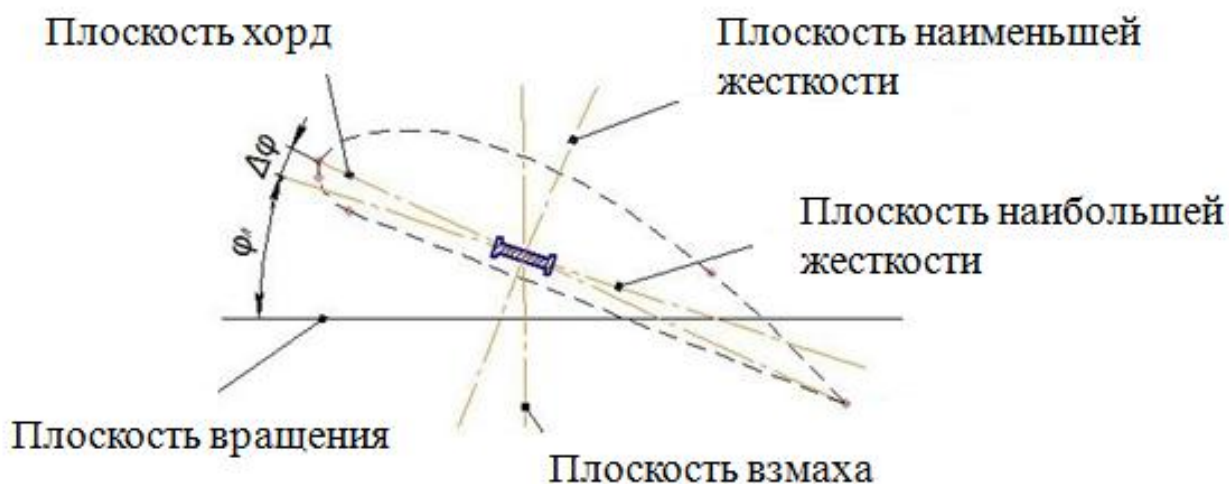


Рис. 15. Плоскости наибольшей и наименьшей жесткостей

В полете на профиль лопасти действуют внешние силы в самых различных направлениях, поэтому задача об изгибе лопасти – очень сложная пространственная задача.

Вместе с тем величина геометрической крутки для лопастей вертолетов не очень велика (порядка $6...12^\circ$) и значительно меньше, чем для самолетных винтов и лопаток компрессоров и турбин. Как показывают разные оценки, влияние этой крутки на результат расчетов невелико. Поэтому во всех приведенных ниже методах расчета закрученностью упругих осей лонжерона лопасти пренебрегаем и считаем, что направление плоскости наибольшей и наименьшей жесткостей лопасти постоянно по ее длине.

Это предположение позволяет спроектировать все внешние силы на плоскости наибольшей и наименьшей жесткостей и решить две упруго несвязанные плоские задачи изгиба лопасти в двух взаимно перпендикулярных направлениях. По окончании расчета для определения напряжений в различных точках сечения лопасти результаты расчетов можно просуммировать.

Профиль сечения лопасти позволяет увеличить размеры лонжерона в плоскости хорд и ограничивает их в перпендикулярном направлении. Поэтому плоскость наибольшей жесткости близка к плоскости, проходящей через хорду лопасти. Это обстоятельство, а также то, что в плоскости хорд величина аэродинамических сил обычно меньше, чем в перпендикулярной ей плоскости, приводит к тому, что величина изгибных напряжений больше при изгибе в плоскости наименьшей жесткости. Если рассматривать современные конструкции лопастей, усталостная прочность которых примерно одинакова при изгибе во всех направлениях, то наиболее опасен изгиб в плоскости наименьшей жесткости. На практике все трудности возникают в связи с необходимостью обеспечения прочности при изгибе в этой плоскости.

Проанализируем методы расчета колебаний лопасти только в плоскости наименьшей жесткости. При расчете в этой плоскости можно использовать дополнительное допущение о том, что плоскость наименьшей жесткости совпадает с плоскостью, проходящей через ось несущего винта. В дальнейшем эту плоскость будем называть плоскостью взмаха.

Крутильные деформации изменяют углы атаки сечений лопасти, а следовательно, и действующие на них аэродинамические силы. Поэтому их нужно учитывать при расчете аэродинамических нагрузок и колебаний лопасти. Однако учет крутильных колебаний лопасти связан со значительными трудностями и усложняет расчет.

В то же время в некоторых случаях учет крутильных колебаний не приводит к существенным уточнениям результатов. Крутильные деформации учитывают только тогда, когда в этом появляется необходимость. Например, когда изгибные колебания лопасти усиливаются из-за близости к изгибному флаттеру, хотя такое положение свидетельствует о недостаточном запасе флаттера и его нельзя считать допустимым.

Для учета крутильных деформаций нужно решать систему дифференциальных уравнений изгибно-крутильных колебаний лопасти.

Если вновь создаваемая лопасть вертолета незначительно отличается по своим геометрическим и массовым характеристикам от уже изготовленной и проверенной, то можно утверждать, что на одинаковых режимах полета действующие в ней переменные напряжения будут примерно такими же, как и в лопасти, являющейся прототипом. Однако это положение нарушается, когда вследствие некоторого изменения ее параметров лопасть оказывается в резонансе с какой-либо гармоникой внешних сил.

Практика проектирования показывает, что достаточно надежные лопасти могут быть созданы только в том случае, если ни одна из ее собственных частот не совпадает с частотами внешних сил и находится от них на достаточном

удалении. Это относится к колебаниям лопасти как в плоскости наименьшей, так и наибольшей жесткости. Следует отметить, что не все гармоники внешних сил опасны для прочности, а только те, величина которых достаточна для создания существенных по величине напряжений. Обычно отсутствие резонансов должно быть обеспечено для гармоник не выше восьмой. Более высокие гармоники внешних сил несут незначительную опасность.

Таким образом, если не допущена грубая ошибка в выборе характеристик лопасти, то для ограничения переменных напряжений в допустимых пределах достаточно только обеспечить отсутствие резонансов. Рассчитывать величины амплитуд переменных напряжений в этом случае нет необходимости. Поэтому опытный конструктор может ограничиться только первым этапом расчета лопасти: определением ее частот собственных колебаний и построением резонансной диаграммы.

Отсюда следует, что расчет частот и форм собственных колебаний лопасти может рассматриваться как предварительный этап расчета лопасти на прочность.

3.2. Модели лопасти, применяемые в расчете

При выполнении расчетов лопасти необходимо представить ее в виде некоторой идеализированной механической модели. Известны три типа механических моделей, которые часто применяют в расчетах.

Балочная модель с непрерывно распределенными параметрами

В этой модели лопасть представлена в виде балки с непрерывно распределенными жесткостями EI , погонной массой m и параметрами, определяющими величину погонной аэродинамической нагрузки.

Такая модель очень удобна при составлении исходных дифференциальных уравнений и применении к ним известных приближенных методов решения. Она необходима для вывода расчетных соотношений, чтобы на этапе численного расчета использовать формулы, относящиеся к модели с дискретными параметрами.

Балочная модель с сосредоточенными грузами

В этой модели лопасть представлена в виде системы связанных между собой сосредоточенных грузов. Связь между этими грузами осуществляется посредством невесомых балочек, обладающих постоянной по длине жесткостью на изгиб, равной жесткости соответствующих участков лопасти.

При определении аэродинамических сил допускается, что к каждому грузу прикреплено отдельное крылышко, площадь которого равна площади участка лопасти. Обычно предполагается, что площадь

$$S_i = \frac{1}{2}(l_{i-1,i} + l_{i,i+1})b_i, \quad (2)$$

где $l_{i-1,i}$ и $l_{i,i+1}$ – длины смежных участков, на которые разбита лопасть при расчете; b_i – хорда лопасти в сечении между этими участками.

Эта модель наиболее точно отражает свойства реальной лопасти. Поэтому при практических расчетах будет использована именно она.

Следует отметить, что этими положительными свойствами балочная модель обладает только при достаточном числе участков z . С уменьшением числа участков форма деформаций балочной модели отличается от формы деформаций лопасти.

Шарнирная модель лопасти

Лопасть представлена в виде многошарнирной цепочки, состоящей из абсолютно жестких невесомых звеньев с массами, сосредоточенными в шарнирах. Жесткость лопасти на изгиб имитируется сосредоточенными в шарнирах упругими элементами. Под действием внешних сил ось такой цепочки примет форму ломаной линии, что вносит определенную погрешность при переходе от лопасти к механической модели.

3.3. Частоты собственных колебаний жесткой лопасти в плоскостях взмаха и качания

ГШ и ВШ позволяют лопасти совершать маховые и качательные движения относительно шарниров. Характер этих движений зависит от динамических характеристик системы – частот и форм собственных колебаний лопасти.

На практике часто возникает необходимость знать динамические характеристики жесткой лопасти, пренебрегая ее упругими деформациями. Форма колебаний жесткой лопасти – это ее повороты вокруг ГШ и ВШ. Рассмотрим изолированные маховые и качательные движения жесткой лопасти в пустоте и определим частоты собственных (свободных) колебаний.

Частота собственных колебаний лопасти в плоскости взмаха

Несущий винт вертолета вращается с постоянной угловой скоростью ω . Вынос горизонтального шарнира обозначим $a_{ГШ}$. Лопасть имеет погонную массу $m_{ног}$.

Равновесное положение лопасти показано на рис. 16. Элементарные центробежные силы $dF_{цб}$, действующие на лопасть, направлены в радиальном направлении и стремятся ее удерживать в горизонтальном положении. Из-за случайного возмущения, действующего на лопасть, возникают свободные маховые колебания вокруг горизонтального шарнира A . Определим частоту маховых колебаний вращающейся лопасти, пренебрегая ее упругостью. Трением в шарнире будем пренебрегать.

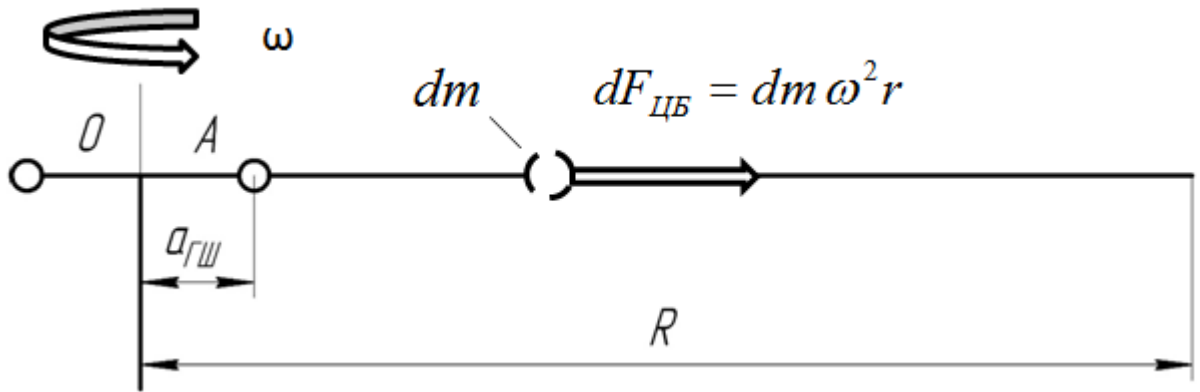


Рис. 16. Равновесное положение вращающейся лопасти

Лопать как абсолютно жесткое тело имеет одну степень свободы, характеризуемую углом взмаха. Угол взмаха β отсчитывают от плоскости вращения винта, он положителен при взмахе вверх. В отклоненном от положения равновесия состоянии на элементарную массу dm , расположенную на расстоянии r от ГШ, действует центробежная сила (рис. 17)

$$dF_{цб} = dm \omega^2 \rho = m_{noz} dr \omega^2 \rho, \quad (3)$$

где ρ – расстояние от оси вращения НВ до элемента dm , которое находим из соотношения

$$\rho = a_{ГШ} + r \cos \beta, \quad (4)$$

r – расстояние от ГШ до элемента dm .

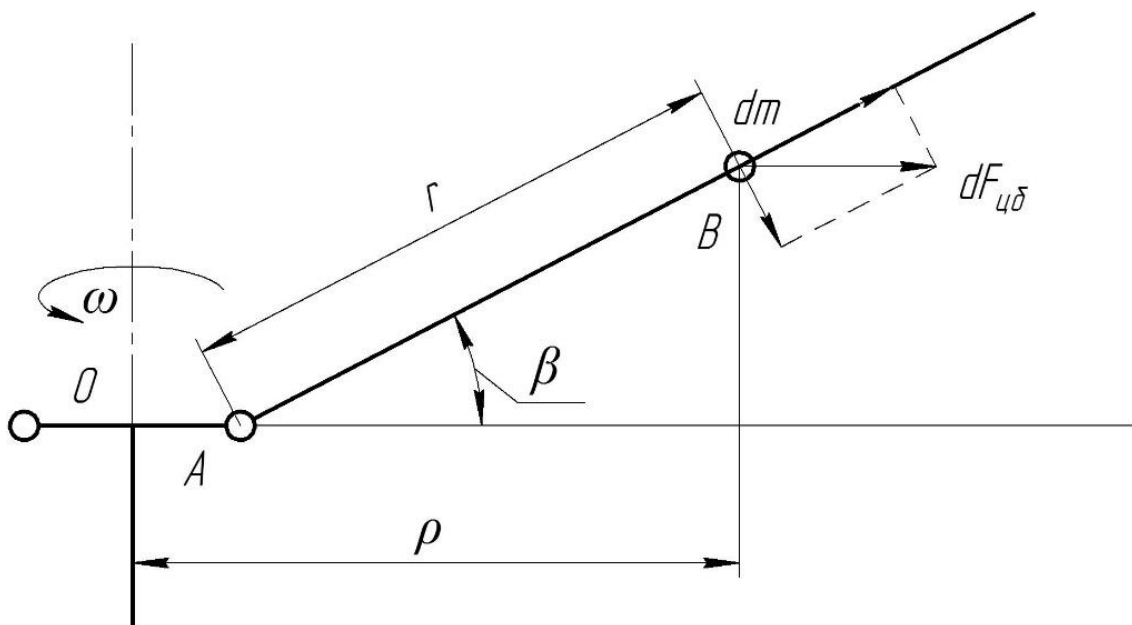


Рис. 17. Действие центробежной силы инерции на бесконечно малый элемент лопасти

Уравнение вращательного движения лопасти относительно ГШ, вызванное действием элементарных сил инерции, имеет вид

$$I_{\Gamma\text{Ш}}\ddot{\beta} = \sum M_A(dF_{\psi\bar{\phi}}), \quad (5)$$

где $I_{\Gamma\text{Ш}}$ – момент инерции лопасти относительно ГШ;

$\ddot{\beta}$ – угловое ускорение.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} I_{\Gamma\text{Ш}}\ddot{\beta} &= - \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} r \sin \beta dF_{\psi\bar{\phi}} = - \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} m_{\text{noz}} \omega^2 \rho r \sin \beta dr = \\ &= - \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} m_{\text{noz}} \omega^2 (a_{\Gamma\text{Ш}} + r \cos \beta) r \sin \beta dr. \end{aligned}$$

При малых углах отклонения лопасти

$$\sin \beta \approx \beta; \quad \cos \beta \approx 1,$$

тогда

$$I_{\Gamma\text{Ш}}\ddot{\beta} = - \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} m_{\text{noz}} \omega^2 (a_{\Gamma\text{Ш}} + r) r \beta dr = \omega^2 \beta a_{\Gamma\text{Ш}} \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} r dm + \omega^2 \beta \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} r^2 dm.$$

Используем известные соотношения

$$S_{\Gamma\text{Ш}} = \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} r dm; \quad I_{\Gamma\text{Ш}} = \int_0^{R-a_{\Gamma\text{Ш}}} r^2 dm,$$

где $S_{\Gamma\text{Ш}}$ – статический момент лопасти относительно ГШ;

$I_{\Gamma\text{Ш}}$ – момент инерции лопасти относительно ГШ.

Таким образом, получим

$$I_{\Gamma\text{Ш}}\ddot{\beta} + \omega^2 \beta (I_{\Gamma\text{Ш}} + S_{\Gamma\text{Ш}} a_{\Gamma\text{Ш}}) = 0. \quad (6)$$

Разделив выражение (1.5) на $I_{\Gamma\text{Ш}}$, найдем угловую скорость собственных колебаний вращающейся лопасти в плоскости взмаха

$$\omega_c = \omega \sqrt{1 + \frac{S_{\Gamma\text{Ш}} a_{\Gamma\text{Ш}}}{I_{\Gamma\text{Ш}}}}. \quad (7)$$

В общем случае частота маховых колебаний лопасти отличается от частоты вращения НВ. Если $a_{\Gamma\text{Ш}} \approx 0$, то формула (7) примет вид

$$\omega_c = \omega, \quad (8)$$

т. е. частота собственных колебаний равна частоте вращения винта, а период колебаний составляет время одного полного оборота НВ:

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (9)$$

Частота собственных колебаний лопасти в плоскости вращения

Считаем, что лопасть абсолютно жесткая и имеет одну степень свободы, связанную с поворотом относительно ВШ. Угол качания ξ задает положение

лопасти относительно ВШ. На рис. 18 показано отклоненное положение лопасти относительно вертикального шарнира. На элементарную массу dm в процессе вращения винта с угловой скоростью ω действует центробежная сила $dF_{цб}$, направленная от оси вращения винта.

Уравнение вращательного движения относительно ВШ имеет вид

$$I_{ВШ}\ddot{\xi} = \sum M_{ВШ} dF_{цб}, \quad (10)$$

где $I_{ВШ}$ – момент инерции лопасти относительно ВШ.

Из треугольника OAB следует, что при малых углах ξ

$$OB \approx a_{ВШ} + r, \quad (11)$$

где $r = AB$.

Кроме того,

$$\frac{OA}{\sin\psi} = \frac{OB}{\sin(180^\circ - \xi)};$$

$$\sin\psi = \frac{OA \sin\xi}{OB} = \frac{a_{ВШ} \sin\xi}{a_{ВШ} + r} \approx \frac{a_{ВШ}\xi}{a_{ВШ} + r}.$$

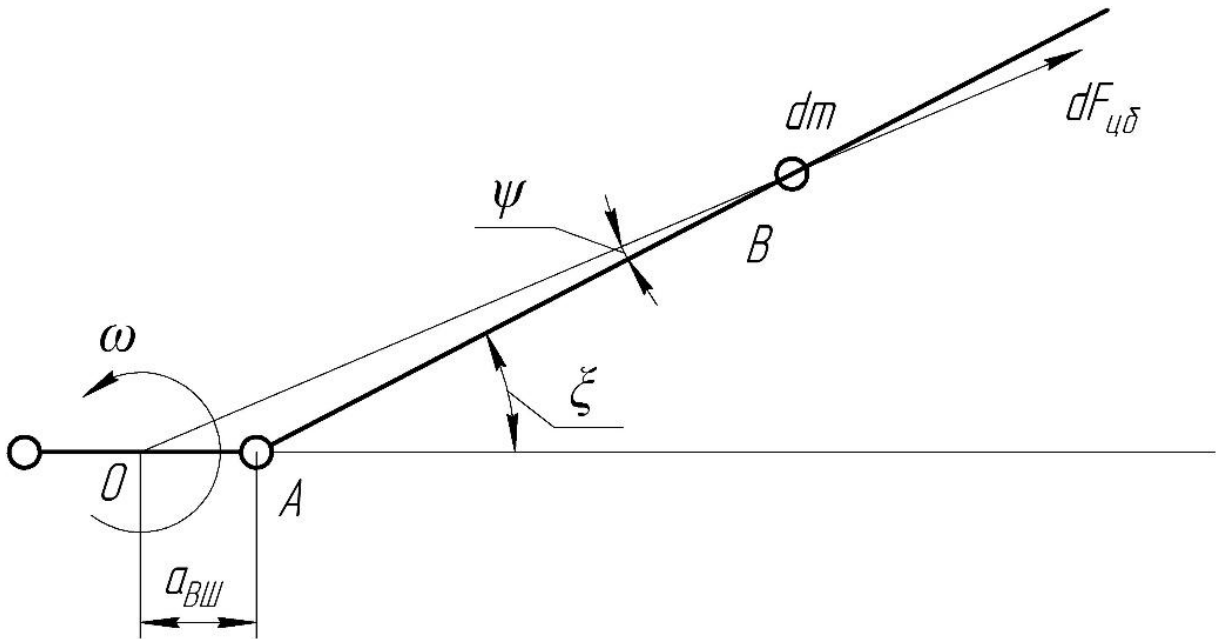


Рис. 18. Отклоненное положение лопасти относительно ВШ

Тогда величина центробежной силы

$$dF_{цб} = dm\omega^2 OB = m_{noz} \omega^2 (a_{ВШ} + r) dr, \quad (12)$$

а ее момент вокруг ВШ

$$dM_{цб} = -dF_{цб} r \sin\psi = -dm \omega^2 OB r \sin\psi = -m_{noz} dr \omega^2 (a_{ВШ} + r) r \sin\psi =$$

$$= -m_{noz} \omega^2 (a_{ВШ} + r) r \frac{a_{ВШ}\xi}{(a_{ВШ} + r)} dr = -m_{noz} \omega^2 a_{ВШ} \xi r dr.$$

Уравнение качаний лопасти

$$I_{BIII}\ddot{\xi} = - \int_0^{R-a_{BIII}} m_{noz}\omega^2 a_{BIII}\xi r dr = -\omega^2 a_{BIII}\xi \int_0^{R-a_{BIII}} m_{noz} r dr. \quad (13)$$

В формуле (13) интеграл

$$S_{BIII} = \int_0^{R-a_{BIII}} m_{noz} r dr$$

есть статический момент лопасти относительно ВШ. С учетом введенного обозначения дифференциальное уравнение качательных колебаний запишем следующим образом:

$$I_{BIII}\ddot{\xi} + \omega^2 a_{BIII}\xi S_{BIII} = 0. \quad (14)$$

Разделив выражение (14) на I_{BIII} , найдем угловую скорость собственных колебаний лопасти в плоскости вращения

$$\omega_c = \omega \sqrt{\frac{a_{BIII} S_{BIII}}{I_{BIII}}}. \quad (15)$$

Отметим, что при отсутствии выноса ВШ лопасть не обладает колебательной устойчивостью относительно радиального направления. При случайном отклонении лопасти на угол ξ восстанавливающий момент отсутствует и наблюдается безразличное равновесие в отклоненном положении.

По статистике с учетом значений выноса вертикального шарнира a_{BIII} и статического момента S_{BIII} собственная частота находится в диапазоне $\omega_c = 0,25...0,3 \omega$. Поэтому лопасть «отстроена» от резонанса с частотами ω , 2ω и т. д.

3.4. Изгибные колебания лопасти

3.4.1. Дифференциальное уравнение изгиба лопасти в поле центробежных сил при колебаниях в плоскости взмаха

Пусть ось жесткости недеформированной лопасти прямолинейна и центры тяжести и жесткости во всех сечениях совпадают, а одноименные главные оси инерции всех сечений параллельны друг другу, т. е. лопасть не закручена (рис. 19).

Лопать вращается с постоянной угловой скоростью ω и совершает колебания в плоскости взмаха. Кроме поворота в горизонтальном шарнире лопасть подвергается изгибу в вертикальной плоскости. Представим ее в виде балки с непрерывно распределенными параметрами.

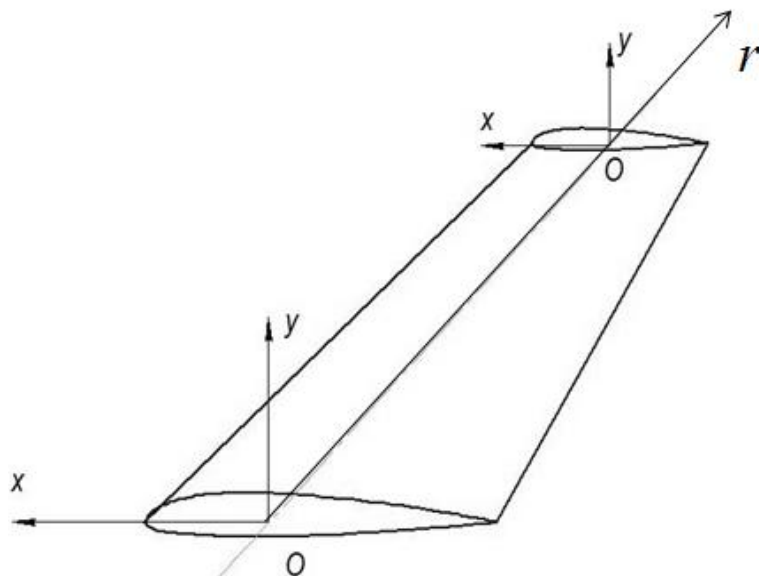


Рис. 19. Положение главных осей инерции сечений незакрученной лопасти

Рассмотрим элемент балки длиной dr . По концам элемента приложены силы и моменты – реакции соседних участков. Разложим силы на составляющие по осям Oy и Or (Q и N). Силы, действующие на этот элемент, показаны на рис. 20.

Погонная поперечная нагрузка W , действующая на лопасть, включает в себя аэродинамическую и инерционную силы

$$W = T - m\ddot{y}. \quad (16)$$

Распределенные вдоль радиуса центробежные силы инерции вызывают в сечении лопасти центробежную силу N .

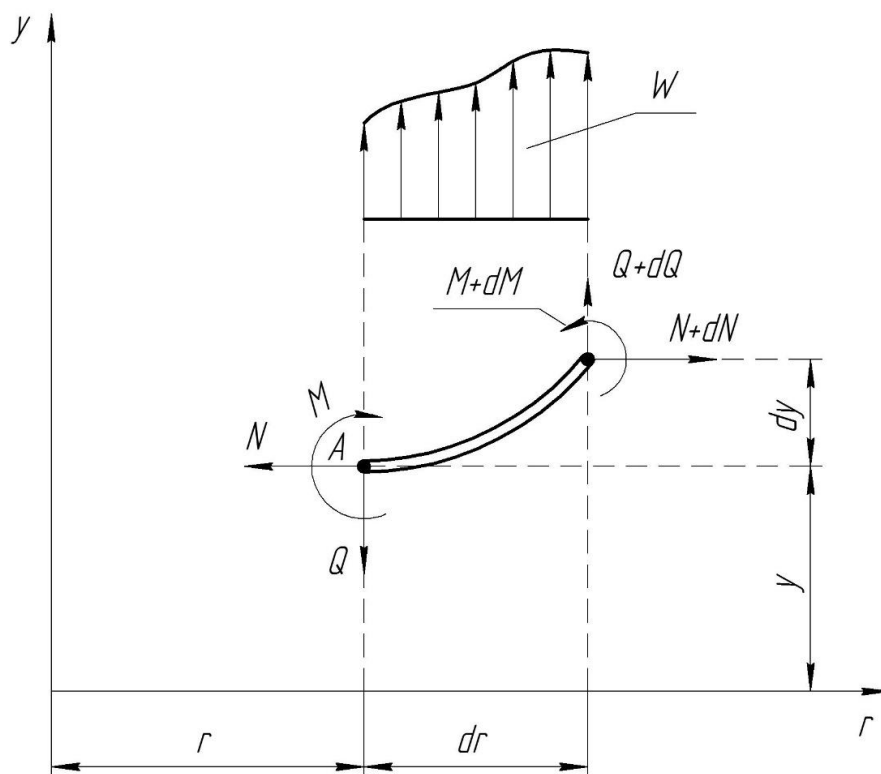


Рис. 20. Силы, действующие на элемент лопасти

Элемент лопасти находится в равновесии под действием заданных поверхностных сил и сил инерции.

Составим уравнения равновесия рассматриваемого элемента, ограничившись малыми величинами первого порядка. Ограничимся условиями равновесия элемента вдоль оси y ($\sum F_y = 0$):

$$\begin{aligned} Q + dQ\Delta r - Q + W\Delta r &= 0; \\ Wdr + dQ &= 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$W = -\frac{dQ}{dr} = -Q' \quad (18)$$

и отсутствием вращения относительно точки A ($\sum M_A = 0$):

$$\begin{aligned} M + dM - M - (N + dN) \frac{\partial y}{\partial r} dr + (Q + dQ)dr + \\ + Wdr \frac{dr}{2} + dN dy = 0. \end{aligned}$$

Сохранив только члены первого порядка малости, получим

$$dM - N dy + Qdr = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial M}{\partial r} - N \frac{\partial y}{\partial r} + Q = 0.$$

Продифференцируем это уравнение по r :

$$M'' - (Ny')' + Q' = 0. \quad (19)$$

Как известно, изгибающий момент выражается через жесткость лопасти EI и ее кривизну y'' :

$$M = EI y''.$$

Подставив в выражение (20) $Q' = -W$, найдем дифференциальное уравнение изгибных деформаций лопасти в поле центробежных сил

$$[EIy'']'' - [Ny']' = W. \quad (20)$$

При определении свободных колебаний поверхностных нагрузок нет, поэтому $T = 0$, в качестве внешней нагрузки согласно принципу Даламбера прикладываем силы инерции $W = -m\ddot{y}$. Получим

$$[EIy'']'' - [Ny']' + m\ddot{y} = 0. \quad (21)$$

Формула (21) является уравнением с частными производными. Обозначим дифференцирование по радиусу штрихом: $\frac{dy}{dr} = y'$, а дифференцирование по времени — точкой: $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$. Уравнение следует рассматривать совместно с граничными условиями.

3.4.2. Свободные изгибные колебания невращающейся однородной лопасти

Формы и частоты колебаний защемленной и шарнирно закрепленной лопастей

Рассмотрим дифференциальное уравнение колебаний в плоскости взмаха (21) лопасти с непрерывно распределенными параметрами. Для невращающейся лопасти $N = 0$, поэтому

$$[EI y'''] + m \ddot{y} = 0. \quad (22)$$

На рис. 21 показаны граничные условия для защемленной и шарнирно закрепленной лопастей.

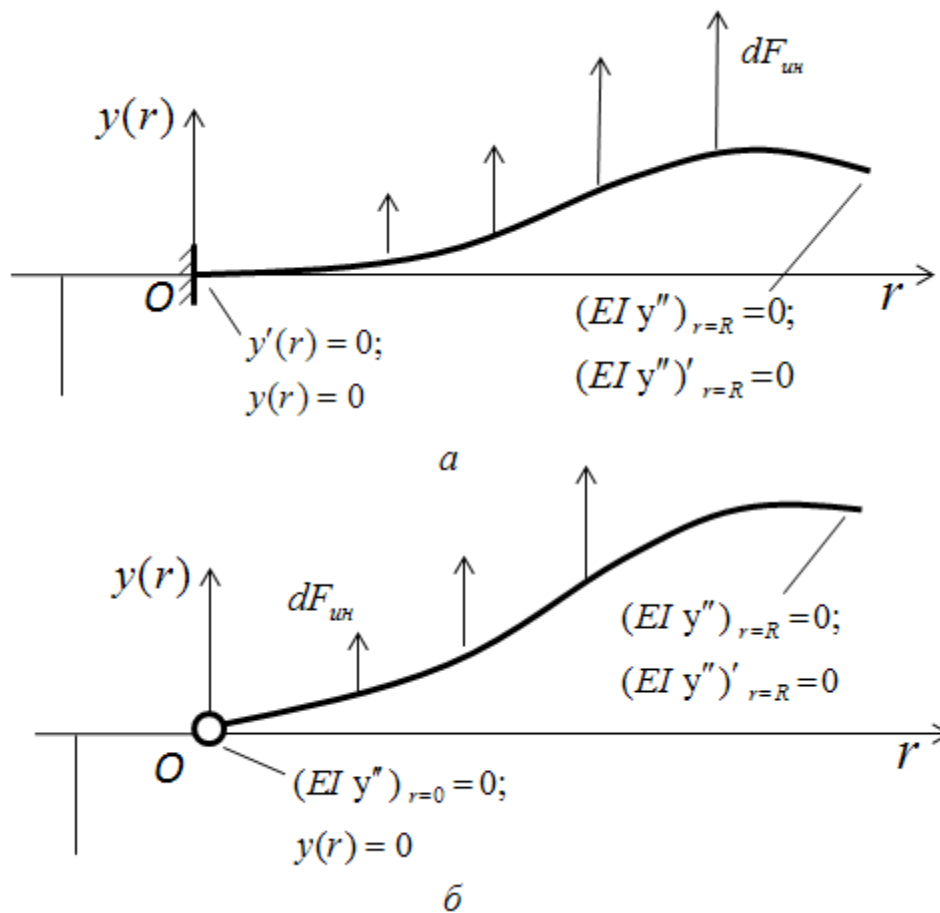


Рис. 21. Граничные условия для защемленной и шарнирно закрепленной лопастей

Защемленная лопасть (рис. 21, а)

Для свободного конца лопасти поперечная сила и изгибающий момент равны нулю:

$$M(r = R) = 0; \quad Q(r = R) = 0. \quad (23)$$

Запишем граничные условия в корневом сечении лопасти, считая, что втулка несущего винта не может совершать перемещений в пространстве. При

таким предположением и жестком креплении лопасти к втулке должны отсутствовать перемещение комлевого сечения лопасти и его поворот:

$$y(r=0) = 0; \quad y'(r=0) = 0. \quad (24)$$

Шарнирно закрепленная лопасть (рис. 21, б)

При шарнирном креплении лопасти должны равняться нулю перемещения и изгибающий момент в шарнире. Если главные оси сечений параллельны осям шарниров, то граничные условия записывают так:

$$y(r=0) = 0; \quad M(r=0) = (EI y'')_{r=0} = 0.$$

Решение уравнения (22) ищем в виде

$$y(r,t) = \xi(r)\delta(t), \quad (25)$$

где $\xi(r)$ – функция, зависящая от радиуса, а $\delta(t)$ – функция, зависящая от времени.

Подставив формулу (25) в (22), получим

$$\frac{EI(r)\xi''(r)}{m(r)\xi(r)} = -\frac{\ddot{\delta}(t)}{\delta(t)}.$$

В левой части равенства имеем функцию только радиуса, а в правой – времени. Обе части уравнения могут быть равны в любой момент времени, если представляют собой постоянную величину, которую обозначим p^2 :

$$\frac{(EI\xi'')''}{m\xi} = -\frac{\ddot{\delta}}{\delta} = p^2.$$

Уравнение равносильно соотношениям

$$(EI\xi'')'' - p^2 m \xi = 0; \quad (26)$$

$$\ddot{\delta} + p^2 \delta = 0. \quad (27)$$

Первое уравнение позволяет найти форму колебаний в процессе движения системы. Функция $\xi(r)$ определяет распределение амплитуд колебаний по длине балки.

Решение уравнения (27), представляющего собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеет вид

$$\delta = M \cos(pt) + N \sin(pt), \quad (28)$$

где p – частота колебаний;

$M; N$ – постоянные, определяемые из начальных условий.

Решение (28) показывает, что при свободных колебаниях происходят гармонические колебания с частотой p .

Невращающаяся лопасть с постоянными по радиусу жесткостью и погонной массой

Получим точные решения для свободных колебаний однородной лопасти. В дальнейшем с помощью аналитических соотношений будем проверять сходимость и точность приближенных методов расчета свободных колебаний реальных лопастей.

Для лопасти с постоянными по радиусу жесткостью и погонной массой уравнение (26) принимает вид

$$\xi^{IV} - \alpha^4 \xi = 0, \quad (29)$$

где

$$\alpha^4 = \frac{p^2 m}{EI}. \quad (30)$$

Общее решение

$$\xi(r) = A^* e^{\alpha r} + B^* e^{-\alpha r} + C^* e^{i\alpha r} + D^* e^{-i\alpha r}. \quad (31)$$

Воспользуемся функциями Крылова:

$$\begin{aligned} S(\alpha, r) &= \frac{1}{2}(ch(\alpha r) + \cos(\alpha r)); \\ T(\alpha, r) &= \frac{1}{2}(sh(\alpha r) + \sin(\alpha r)); \\ U(\alpha, r) &= \frac{1}{2}(ch(\alpha r) - \cos(\alpha r)); \\ V(\alpha, r) &= \frac{1}{2}(sh(\alpha r) - \sin(\alpha r)), \end{aligned} \quad (32)$$

тогда уравнение (31) можно представить так:

$$\xi(r) = AS(\alpha r) + BT(\alpha r) + CU(\alpha r) + DV(\alpha r). \quad (33)$$

Для определения коэффициентов A, B, C, D необходимо использовать граничные условия, из которых получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно этих неизвестных.

При жестком защемлении лопасти перемещение и угол поворота в комле равны нулю, а на свободном крае равны нулю поперечная сила и изгибающий момент. В математической записи граничные условия имеют вид

$$\xi(0) = 0; \quad \xi'(0) = 0; \quad \xi''(R) = 0; \quad \xi'''(R) = 0. \quad (34)$$

Из условия $\xi(0) = \xi'(0) = 0$ следует, что $A = B = 0$. Условия $\xi''(R) = 0$ и $\xi'''(R) = 0$ равносильны системе

$$\begin{aligned} \alpha^2 CS(\alpha R) + \alpha^2 DT(\alpha R) &= 0; \\ \alpha^3 CV(\alpha R) + \alpha^3 DS(\alpha R) &= 0. \end{aligned}$$

Система однородных линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение только в том случае, если определитель матрицы, построенной с использованием коэффициентов при неизвестных, равен нулю:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} S(\alpha R) & T(\alpha R) \\ V(\alpha R) & S(\alpha R) \end{pmatrix} = S^2(\alpha R) - T(\alpha R)V(\alpha R) = 0$$

или

$$\operatorname{ch}(\alpha R) \cos(\alpha R) + 1 = 0.$$

Графическое решение уравнения

$$\cos \lambda = -1/\operatorname{ch} \lambda,$$

где $\lambda = \alpha R$ (рис. 22).

Графическая интерпретация указывает на бесконечное число точек пересечения кривых. Корни уравнения

$$\lambda_1 = 1,875; \quad \lambda_2 = 4,694; \quad \lambda_k = \frac{2k-1}{2} \pi \quad \text{при } k > 2.$$

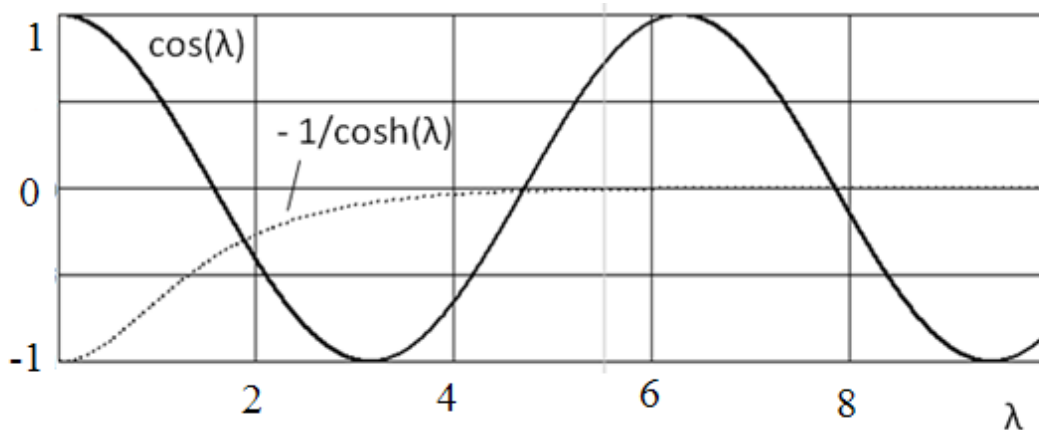


Рис. 22. Определение корней частотного уравнения

Приведем первые четыре корня трансцендентного уравнения

$$\alpha_1 \approx \frac{1,875}{R}; \quad \alpha_2 \approx \frac{4,694}{R}; \quad \alpha_3 \approx \frac{7,855}{R}; \quad \alpha_4 \approx \frac{10,996}{R}.$$

Подставив $\alpha = \alpha_j$ из условия $\xi''(R) = 0$ или $\xi'''(R) = 0$, получим

$$\frac{D_j}{C_j} = -\frac{S(\alpha_j R)}{T(\alpha_j R)} = -\frac{V(\alpha_j R)}{S(\alpha_j R)}.$$

Тогда форму колебаний при $\alpha = \alpha_j$ можно записать так:

$$\xi_j(r) = C_j \left[U(\alpha_j r) + \left(-\frac{S(\alpha_j R)}{T(\alpha_j R)} V(\alpha_j r) \right) \right].$$

На рис. 23 показаны первые четыре формы собственных колебаний для случая жесткого крепления лопасти.

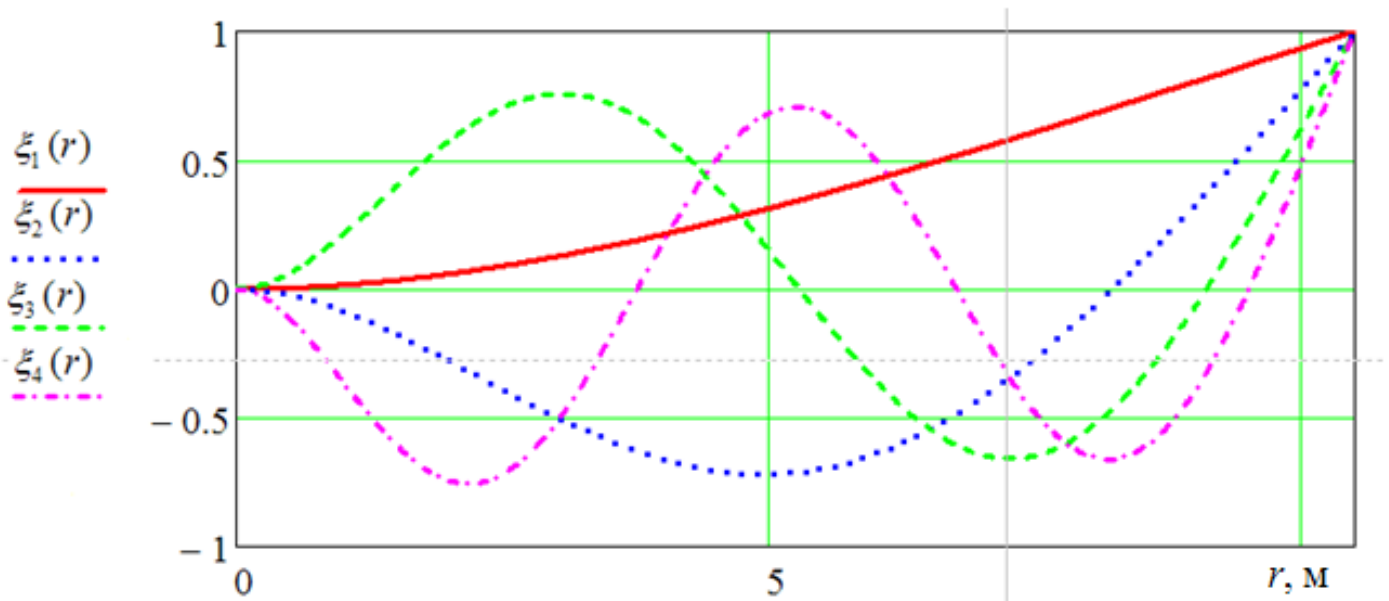


Рис. 23. Формы собственных колебаний для случая жесткого крепления

Частоты определяют из уравнения (30)

$$p_j = \alpha_j^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

Круговая частота собственных колебаний для первых четырех тонов изгибных колебаний, рад/с, составляет

$$p_1 = 5,566; \quad p_2 = 34,808; \quad p_3 = 97,465 \quad \text{и} \quad p_4 = 190,992 .$$

Поступая аналогично для случая шарнирного крепления лопастей, получаем уравнение для определения значений α_j :

$$tg(\alpha_j R) = th(\alpha_j R), \quad (36)$$

откуда

$$\alpha_1 \approx \frac{3,927}{R}; \quad \alpha_2 \approx \frac{7,068}{R}; \quad \alpha_3 \approx \frac{10,210}{R}; \quad \alpha_4 \approx \frac{13,352}{R}.$$

Форму колебаний описывают выражением

$$\xi_j(r) = B \left[T(\alpha_j r) + \left(-\frac{V(\alpha_j R)}{T(\alpha_j R)} V(\alpha_j r) \right) \right].$$

На рис. 24 показаны первые четыре формы собственных колебаний для случая шарнирного крепления лопасти. Все формы нормированы так, что перемещение конца лопасти равно единице.

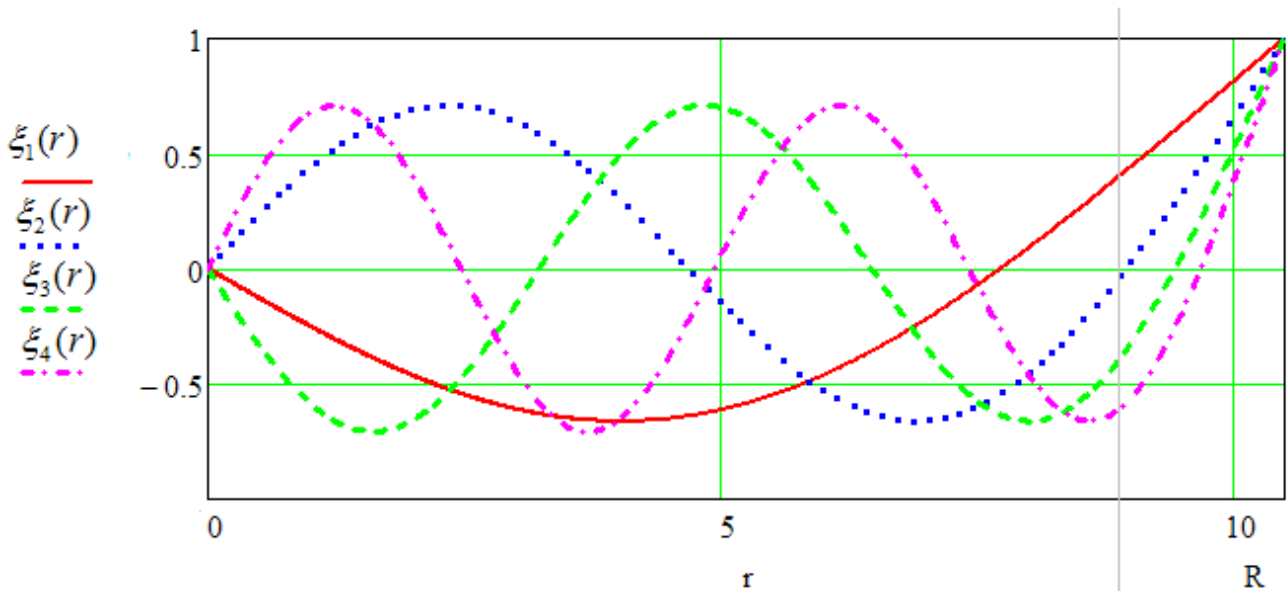


Рис. 24. Формы собственных колебаний для случая шарнирного крепления лопасти

Таким образом, при шарнирном креплении для лопасти существует так называемая нулевая форма, отвечающая за движение лопасти как абсолютное твердое тело. На рис. 24 она не показана. Для лопасти с жестким креплением к втулке нулевой тон отсутствует.

Круговая частота собственных колебаний для первых четырех тонов изгибных колебаний шарнирной лопасти, рад/с, составляет

$$p_1 = 24,357; p_2 = 78,931; p_3 = 164,683 \text{ и } p_4 = 281,617 .$$

Собственные частоты возрастают с увеличением жесткости и уменьшением погонной массы. Для заметного изменения частот надо существенно изменить жесткость или массу, так как эти параметры входят в формуле (35) в подкоренное выражение. Отметим, что для приведенных условий закрепления выполняется условие ортогональности форм колебаний

$$\int_0^R m \xi_i(r) \xi_k(r) dr = 0; \quad i \neq k. \quad (37)$$

Сравним собственные частоты для одной и той же лопасти, закрепленной жестко и шарнирно. С учетом нулевого тона ($p_0^{\text{ш}} = 0$) справедлив следующий ряд неравенств:

$$p_0^{\text{ш}} < p_1^{\text{ж}} < p_1^{\text{ш}} < p_2^{\text{ж}} < \dots$$

Распределения напряжений по радиусу лопасти при изгибных колебаниях

Собственные формы позволяют получить представление о характере распределения напряжений по радиусу лопасти при изгибных колебаниях. Используя известные из курса сопротивления материалов формулы, найдем

$$\sigma = \frac{M h}{I} = \frac{EI y'' h}{I} = E h y'', \quad (38)$$

где σ – напряжение, возникающее в лопасти;

E – модуль упругости материала лопасти;

h – расстояние от главной оси до наиболее удаленной точки профиля.

Учитывая, что $y(r,t) = \xi(r)\delta(t)$, получим

$$\sigma = E h y'' = E h \xi''(r) \delta(t).$$

Тогда амплитуда напряжений

$$\Delta\sigma = E h \xi''(r) \sqrt{M^{*2} + N^{*2}} = C \xi''(r).$$

Вторые производные можно определить по формам колебаний $\xi_j(r)$. На рис. 25 и 26 показано изменение кривизны лопасти вдоль радиуса для первых четырех тонов упругих колебаний для заземленной и шарнирно закрепленной лопастей.

Кривизна упругой линии в точках закрепления и вблизи максимальных отклонений увеличивается с номером тона упругих колебаний (рис. 25, 26).

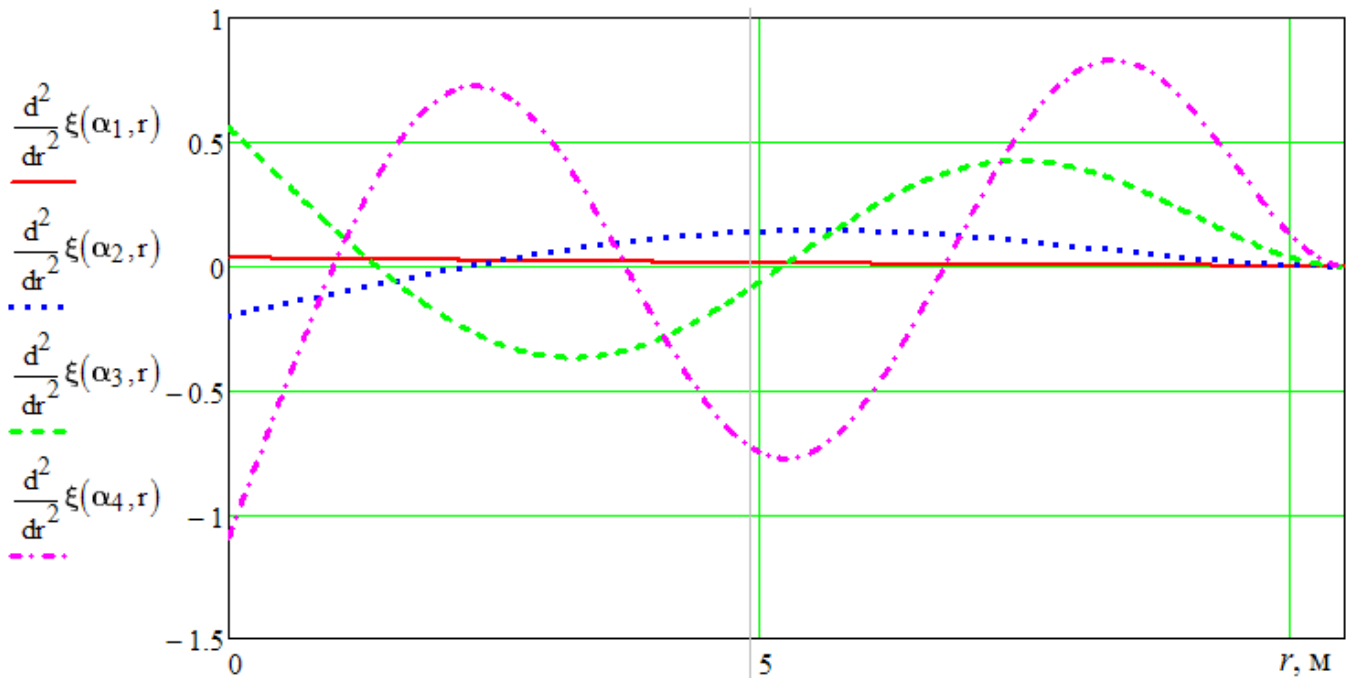


Рис. 25. Изменение кривизны заземленной лопасти вдоль радиуса

Для жестко закрепленной лопасти максимальные напряжения σ действуют в комле. При колебаниях по второму тону большие напряжения σ возникают в средней части лопасти ($\bar{r} = r/R \approx 0,5$), а при колебаниях по третьему тону – при $\bar{r} \approx 0,3$ и $\bar{r} \approx 0,7$.

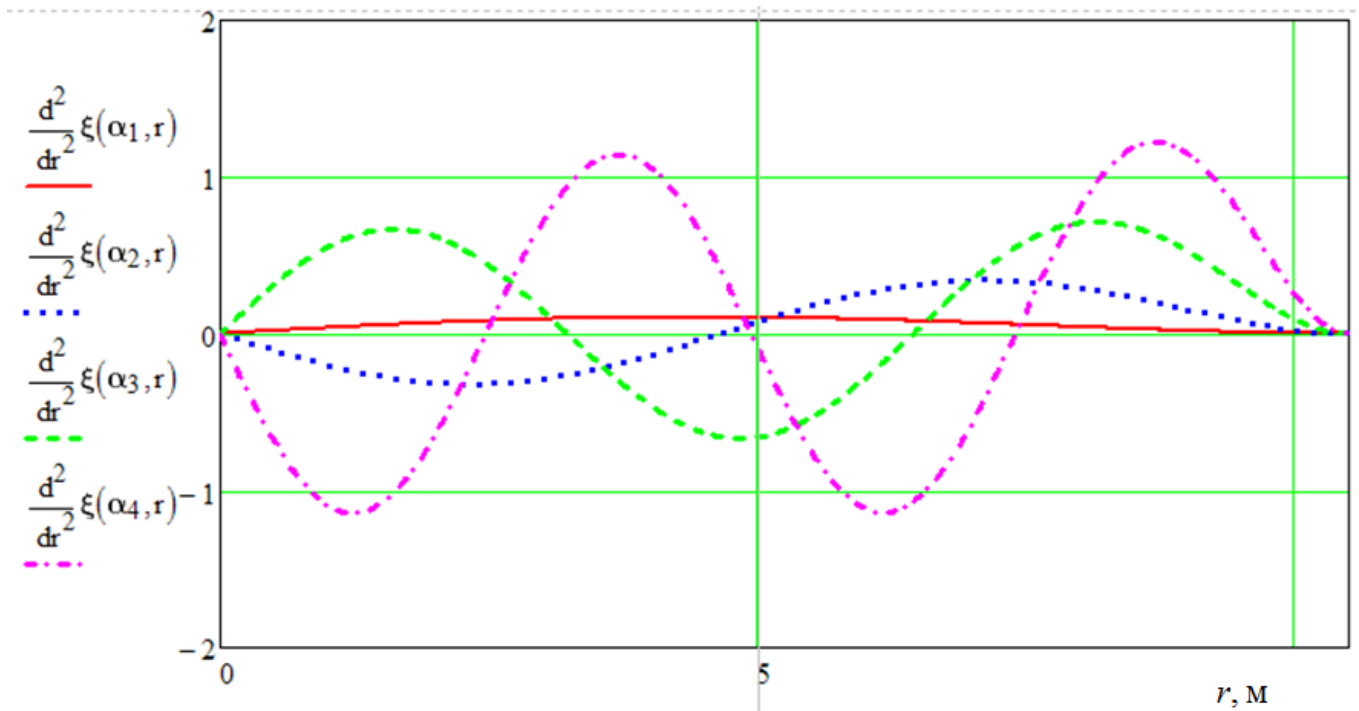


Рис. 26. Изменение кривизны шарнирно закрепленной лопасти вдоль радиуса

Для шарнирно закрепленной лопасти в процессе колебаний по различным упругим тонам максимальные напряжения σ возникают в таких сечениях: $\bar{r} \approx 0,4$ (первый тон) ; $\bar{r} \approx 0,25$ и $\bar{r} \approx 0,7$ (второй тон) ; $\bar{r} \approx 0,15$, $\bar{r} \approx 0,45$ и $\bar{r} \approx 0,8$ (третий тон).

Аналогично можно получить результаты для колебаний в плоскости вращения, так как вид уравнений движения одинаков. При одинаковых граничных условиях значения α_j и формы колебаний в плоскости минимальной и максимальной жесткостей совпадают. Частоты колебаний определяют по формуле

$$p_j = \alpha_j^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Как правило, жесткость лопасти в плоскости вращения EI_y больше, чем в плоскости взмаха EI_x , поэтому значения частот в различных плоскостях отличаются. Частоты собственных изгибных колебаний невращающейся лопасти в плоскости вращения обычно выше, чем в плоскости взмаха.

Расчет напряжений при падении лопасти на ограничитель свеса

Формы и частоты собственных колебаний невращающейся лопасти позволяют решить задачу о напряжениях, возникающих при свободных колебаниях лопасти в условиях одного из самых опасных наземных случаев нагружения.

Рассмотрим падение на ограничитель невращающейся непришвартованной лопасти, поднятой вверх, например, порывом ветра на некоторый заданный угол β_0 (рис. 27). Этот расчетный случай может быть определяющим по прочности для лонжерона и втулки.

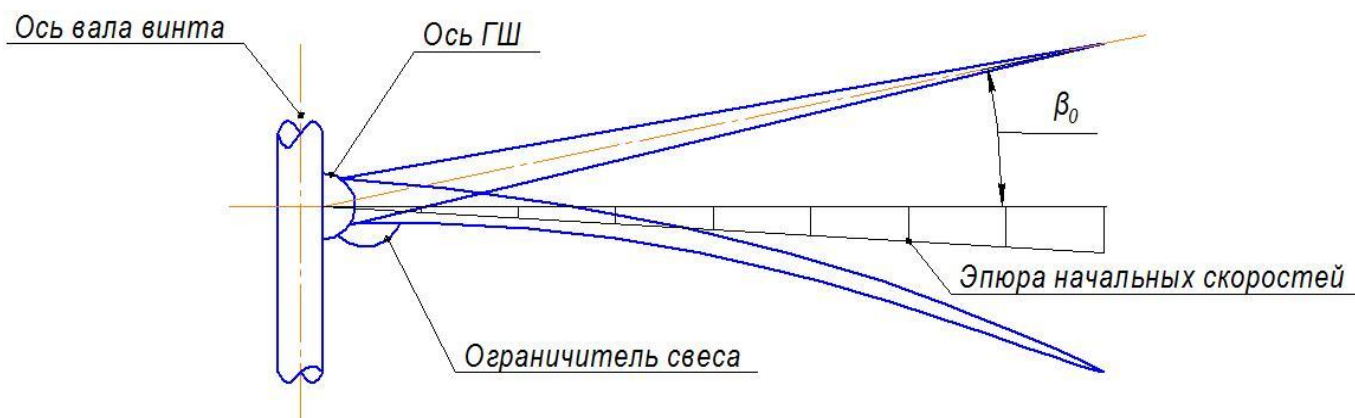


Рис. 27. Падение лопасти на ограничитель свеса

При падении на ограничитель свеса в лопасти возбуждаются свободные изгибные колебания, при которых возникают демпфирующие силы (аэродинамические силы и силы внутреннего демпфирования), поэтому колебания постепенно затухают.

При определении максимальных напряжений в лонжероне демпфированием можно пренебречь.

Лопать имеет бесконечное число степеней свободы, представим ее деформацию как комбинацию заданных форм движения, в качестве которых возьмем формы свободных колебаний.

С учетом этого уравнение движения лопасти имеет вид

$$y(t, r) = \sum_j (M_j \cos(p_j t) + N_j \sin(p_j t)) \xi_j(r), \quad (39)$$

где p_j и ξ_j – частоты и формы собственных изгибных колебаний j -го тона. Суммирование распространяется на все удерживаемые тона упругих колебаний.

Частоты и формы собственных изгибных колебаний определяют для защемленной лопасти. Это объясняется тем, что комель лопасти в процессе удара соприкасается с ограничителем, т. е. выполняются такие же граничные условия, как и для лопасти с жестким креплением к втулке. Постоянные M_j и N_j находят из начальных условий, имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} y(t=0) &= 0; \\ \dot{y}(t=0) &= v_0(r), \end{aligned} \quad (40)$$

т. е. в начальный момент времени возникновения колебаний лопасть, коснувшаяся ограничителя, не изогнута, а её точки обладают некоторой линейной

скоростью $v_0(r)$, распределенной вдоль радиуса по линейному закону. Подставляя $t = 0$ в решение (39) и приравнявая нулю в соответствии с первым условием (40), получаем

$$\sum_j M_j \xi_j(r) = 0, \quad (41)$$

следовательно, $M_j = 0$ при любом j .

Продифференцировав по времени решение (39) и используя второе начальное условие (40), находим

$$\sum_j N_j p_j \xi_j(r) = v_0(r). \quad (42)$$

Воспользуемся условием ортогональности собственных форм. Умножим выражение (42) на каждую из форм $\xi_k(r)$ и проинтегрируем вдоль радиуса:

$$\sum_j N_j p_j \int_0^R m \xi_j(r) \xi_k(r) dr = \int_0^R v_0(r) m \xi_k(r) dr.$$

В левой части выражения все слагаемые, за исключением члена с индексом $j = k$, равны нулю. Поэтому в левой части уравнения остается только коэффициент

$$N_k = \frac{\int_0^R m v_0(r) \xi_k(r) dr}{p_k \int_0^R m (\xi_k(r))^2 dr}. \quad (43)$$

Как видно из (43), требуется определить распределение скоростей $v_0(r)$.

Лопать под действием распределенных сил тяжести $mdrg$ совершает ускоренное вращение относительно ГШ (рис. 28). Считаем, что в процессе падения до касания ограничителя лопать не деформируется.

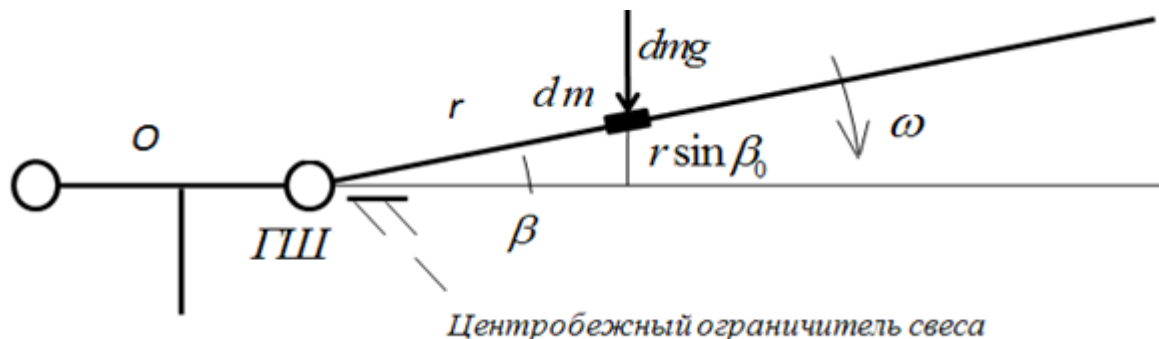


Рис. 28. Падение лопасти на центробежный ограничитель свеса

Распределение начальных скоростей $v_0(r)$ в момент касания лопастью ограничителя свеса определяют из условия закона сохранения полной механической энергии: потенциальная энергия поднятой лопасти переходит в ее кинетическую энергию

$$П = Т.$$

Потенциальная энергия поднятой лопасти равна работе распределенных сил тяжести. Силы тяжести – потенциальные, поэтому

$$A = П = \int_0^R mgr \sin \beta_0 dr.$$

Кинетическую энергию лопасти находят как энергию вращающегося твердого тела вокруг ГШ:

$$T = 0,5 I_{ГШ} \omega_l^2.$$

Приравнивая эти энергии, получаем

$$\int_0^R mgr \sin \beta_0 dr = I_{ГШ} \frac{\omega_l^2}{2},$$

где $I_{ГШ}$ – момент инерции лопасти относительно горизонтального шарнира;

ω_l – угловая скорость вращения лопасти относительно ГШ в момент касания ограничителя свеса.

Линейные скорости произвольного элемента лопасти в момент касания ограничителя

$$v_0(r) = \omega_l r. \quad (44)$$

Подставив выражение (44) в (43), получим уравнение движения лопасти после касания упора. Свободные колебания, возбуждаемые при этом, характеризуются большими инерционными нагрузками, которые могут привести к разрушению основного силового элемента – лонжерона.

Приведем данные расчетов собственных колебаний лопасти вертолета при ее падении на ограничитель свеса. Пусть угол отклонения лопасти относительно ГШ из-за порыва ветра равен $\beta_0 = 27^\circ$. Принимаем, что лопасть однородна вдоль размаха и ее изгибная жесткость составляет $EI = 129 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$, а погонная масса – $m_n = 13,2 \text{ кг/м}$.

Нормальные напряжения вдоль радиуса лопасти определяют в точках T_1 и T_3 , наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 29).

Динамические характеристики лопасти были вычислены ранее. Они являются исходной информацией для расчета свободных колебаний при ударе. Круговая частота собственных колебаний для первых четырех тонов изгибных колебаний, рад/с, составляет

$$p_1 = 3,062; p_2 = 19,226; p_3 = 53,842 \text{ и } p_4 = 105,285.$$

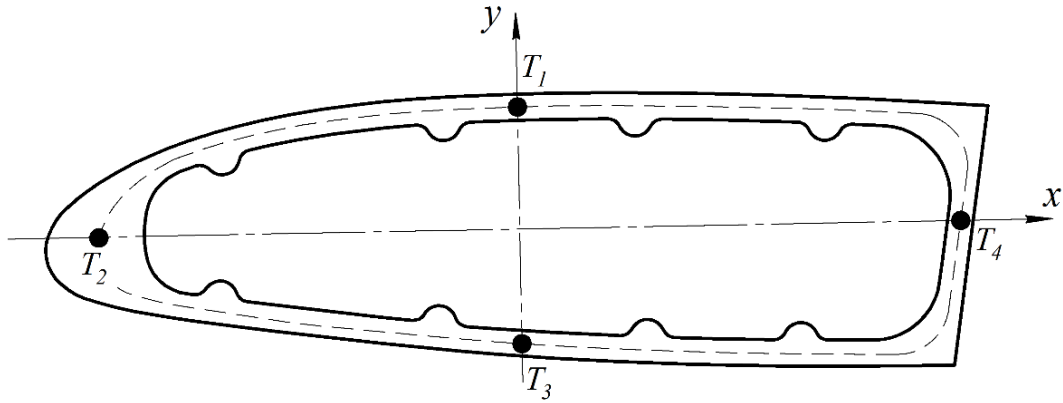


Рис. 29. Положение расчетных точек

Уравнение движения лопасти (ее свободных колебаний) после касания ограничителя свеса имеет вид (39).

Будем удерживать четыре тона упругих колебаний. Тогда для рассматриваемой задачи вектор-столбец коэффициентов

$$N = \begin{pmatrix} 4,407 \\ -0,144 \\ 2,46 \cdot 10^{-3} \\ -8,967 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Фактически величины коэффициентов характеризуют вклад тонов упругих колебаний в деформацию лопасти. Видно, что наибольший вклад в деформацию вносит первая форма, а вторая – на порядок меньше, третья и четвертая – очень малый вклад.

На рис. 30 показана форма лопасти в различные моменты времени ($t = 0; 0,1; 0,45$ и 1 с).

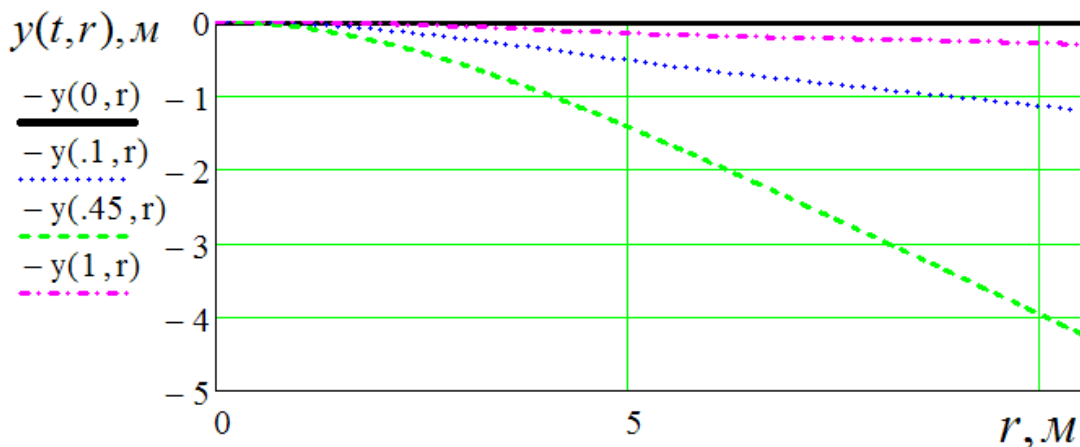


Рис. 30. Форма деформированной лопасти в процессе удара

В момент времени $t=0$ лопасть касается ограничителя свеса и не деформируется. В момент времени $t=0,45$ с деформация лопасти достигает

наибольшей величины, а перемещение конца лопасти составляет больше двух метров. Как видно, деформацию определяют с помощью слагаемых $N_1 \sin(p_1 t) \xi_1(r)$.

Покажем изменение кривизны лопасти для разных моментов времени на рис. 31.

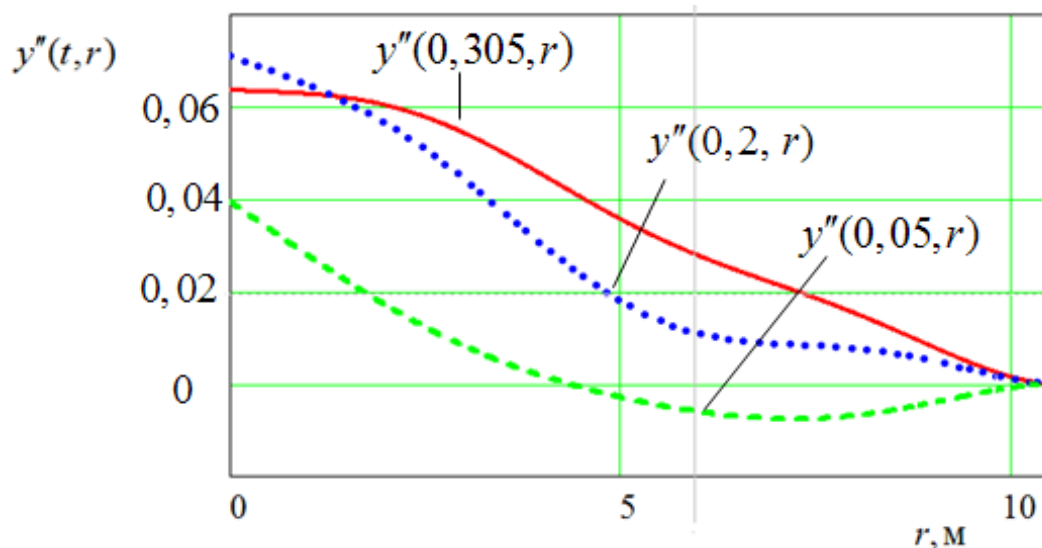


Рис. 31. Изменение кривизны лопасти для разных моментов времени

Как известно, кривизна характеризует нагруженность лопасти. Отметим, что в начальные моменты времени в конструкции возбуждаются колебания по высшим тонам. В конце удара определяющей в нагружении лопасти есть первая изгибная форма.

Вычислим напряжение в наиболее удаленной точке лопасти от нейтральной оси

$$\sigma = E h y'' \quad (46)$$

Напряжения в одной и той же точке T_1 по радиусу лопасти, как и кривизна, распределяются в различные моменты времени сложным образом (рис. 32).

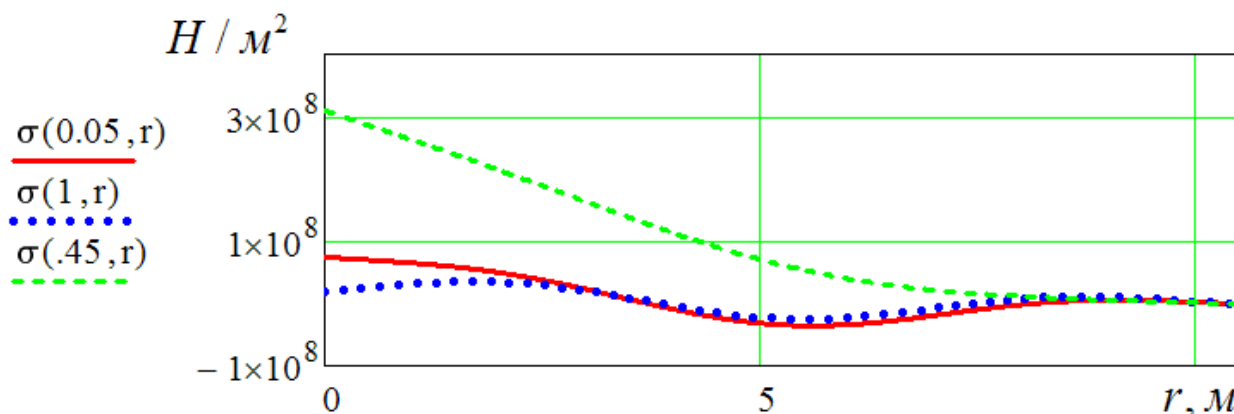


Рис. 32. Распределение напряжения по радиусу лопасти в различные моменты времени

В момент времени $t = 0,05$ с верхнее волокно в комлевых участках растянуто, а на удалении $r = 5,0 \dots 10,5$ м – сжато. В дальнейшем по мере изгиба по первой форме напряжения становятся везде растягивающими.

Видно, что в конструкции возбуждаются упругие колебания по всем формам. Их вклад в распределение напряжений в отдельные моменты времени различный.

В начальные моменты времени существуют участки лопасти, где на верхней полке лонжерона напряжения сжимающие. В конце удара распределение напряжений на верхней полке определяется деформацией по первой и второй формам и напряжения везде растягивающие.

Вклад второй, третьей и четвертой форм в величину напряжения в наиболее удаленной точке лонжерона показан на рис. 33. Сопоставление напряжений с данными рис. 32 показывает, что высшие формы колебаний необходимо учитывать при нахождении напряженного состояния лонжерона.

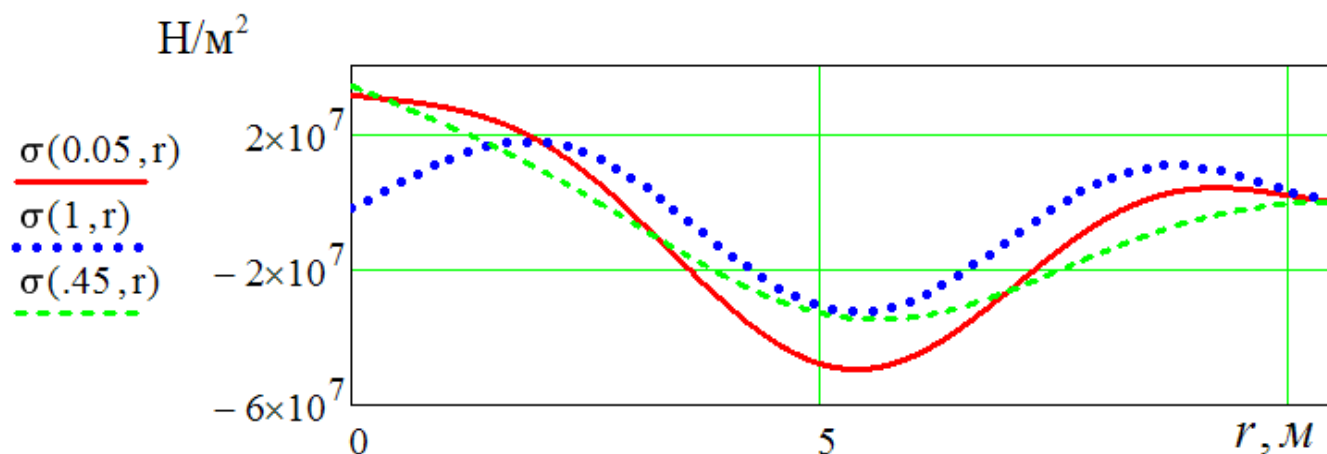


Рис. 33. Вклад второй, третьей и четвертой форм в величину напряжения

Покажем на основе формулы (46) изменение напряжений в лопасти в зависимости от координаты сечения r и времени t (рис. 34).

Характер изменения напряжений в комле лопасти и посередине отличается, т. е. вклад удерживаемых тонов колебаний различен. Как видно (рис. 34, а), максимальные напряжения в комле лопасти изменяются с большой частотой и в момент времени $t = 0,5$ с достигают наибольшей величины. При $r = 0$ хорошо видны многочисленные пики напряжений, вызванные высшими тонами колебаний. В момент времени $t = 1,0$ с лопасть имеет небольшую деформацию по первой форме (рис. 34, б), напряжения в лонжероне связаны с высшими формами колебаний.

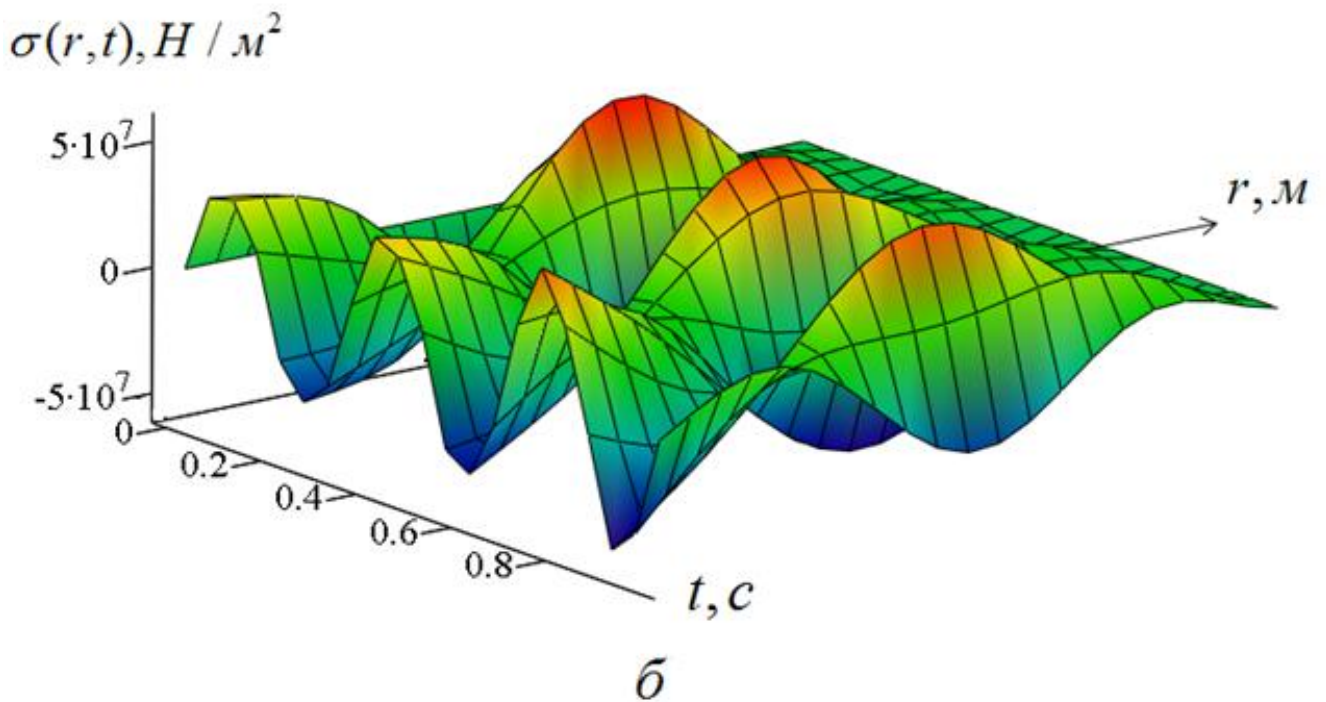
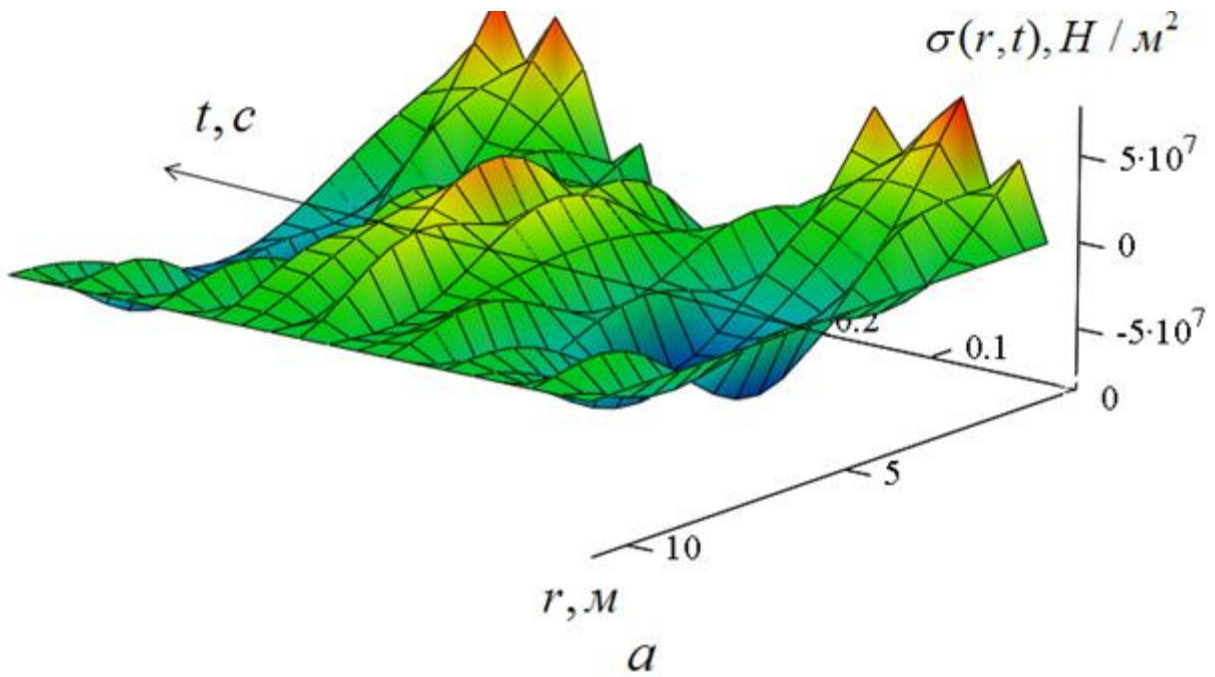


Рис. 34. Изменение напряжений в лопасти

На рис. 35 показан другой вид на поверхность $\sigma = \sigma(r, t)$. Видно, как изменяется напряжение в определенный момент времени для различных точек лопасти и в фиксированных точках во времени. Напряжения на конце лопасти

равны нулю, а по мере приближения к заделке они то увеличиваются, то уменьшаются.

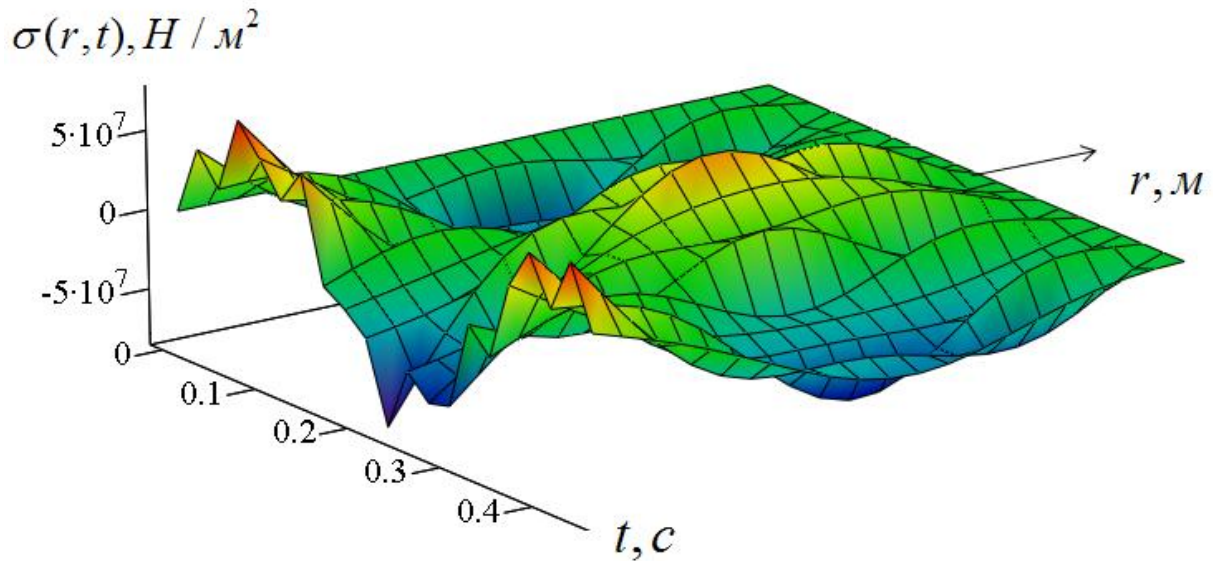


Рис. 35. Изменение напряжений в лопасти

На рис. 36 показано изменение напряжения во времени в двух точках лопасти. Момент времени, когда напряжения в лонжероне равны нулю, соответствует отделению лопасти от ограничителя свеса. Если бы лопасть была защемлена, то напряжения со временем изменили бы знак на противоположный (рис. 36).

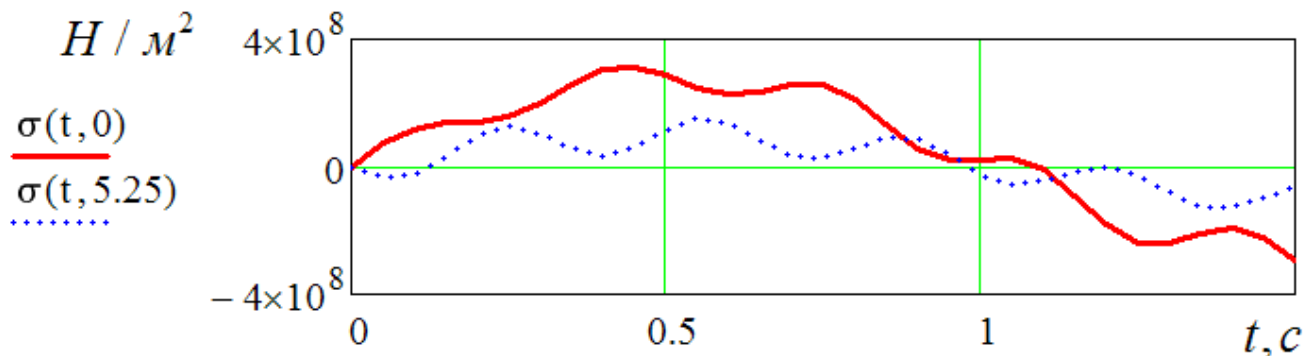


Рис. 36. Напряжения в комле и посередине лопасти

Отметим, что приведенные соотношения и результаты имеют смысл до момента отделения лопасти от ограничителя свеса, после этого ее деформацию необходимо раскладывать по формам шарнирно закрепленной лопасти.

Для реального распределения жесткостных и массовых характеристик лопасти результаты расчета удара лопасти отличаются от приведенных выше.

На рис. 37 показаны результаты расчета амплитуд свободных колебаний лопасти для пяти удерживаемых тонов. Как видно, возбуждаются упругие колебания в основном по первому тону и незначительные – по второму тону.

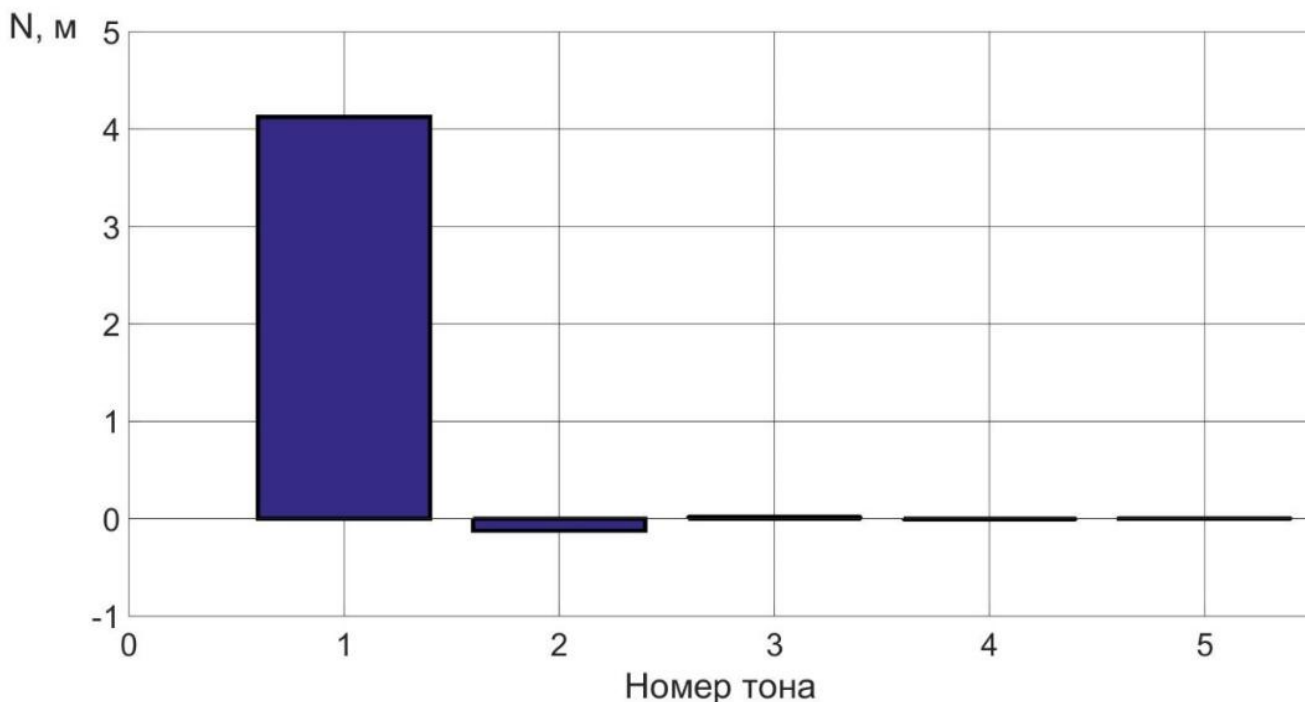


Рис. 37. Вклад тонов упругих колебаний при деформировании лопасти в процессе удара

На рис. 38 показан график зависимости напряжения от времени в опасном сечении лопасти.

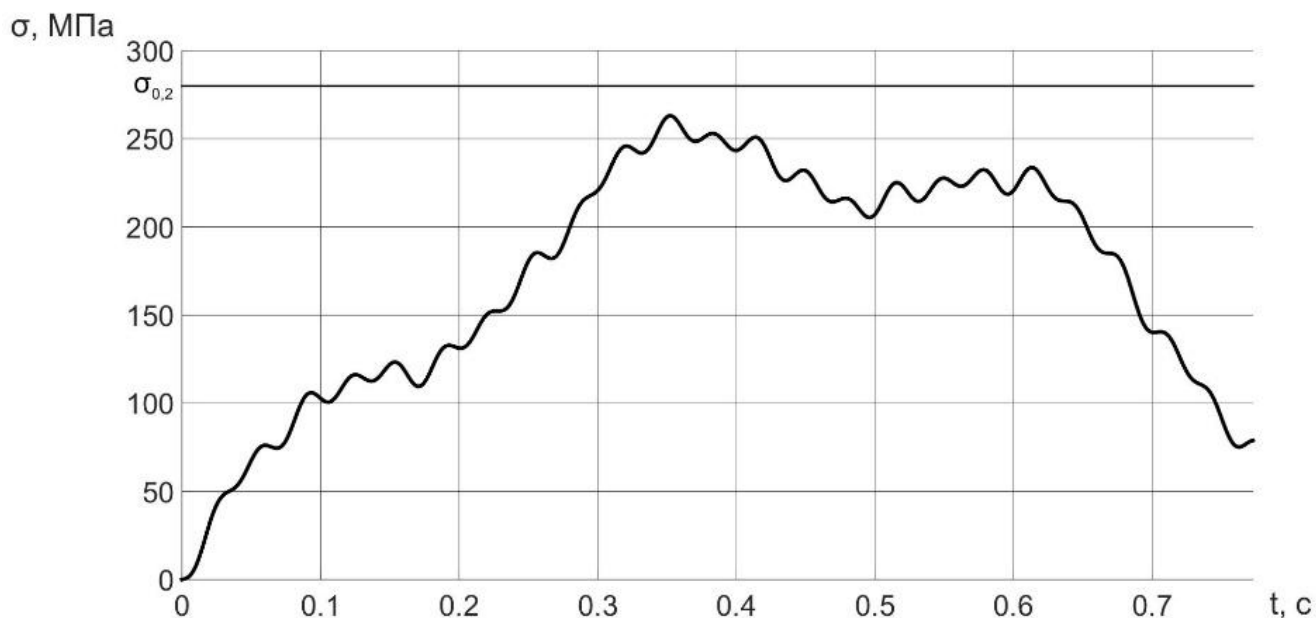


Рис. 38. Напряжения в опасном сечении лонжерона при ударе лопасти об ограничитель

Из рис. 38 видно, что напряжения не доходят до предела текучести материала, т. е. для этого расчетного случая прочность лопасти обеспечена. При оценке напряжений необходимо учитывать вклад высших тонов колебаний. Однако следует отметить, что в реальной конструкции высшие тона довольно быстро затухают. Расчетные напряжения согласно методике завышены по сравнению с действительными, так как не учитывается геометрически нелинейное поведение конструкции, а также наличие аэродинамического и конструкционного демпфирования.

На рис. 39 показано изменение напряжения около восемнадцатого отсека лопасти. Вклад всех удерживаемых тонов в величину напряжения концевых участков лопасти практически одного порядка.

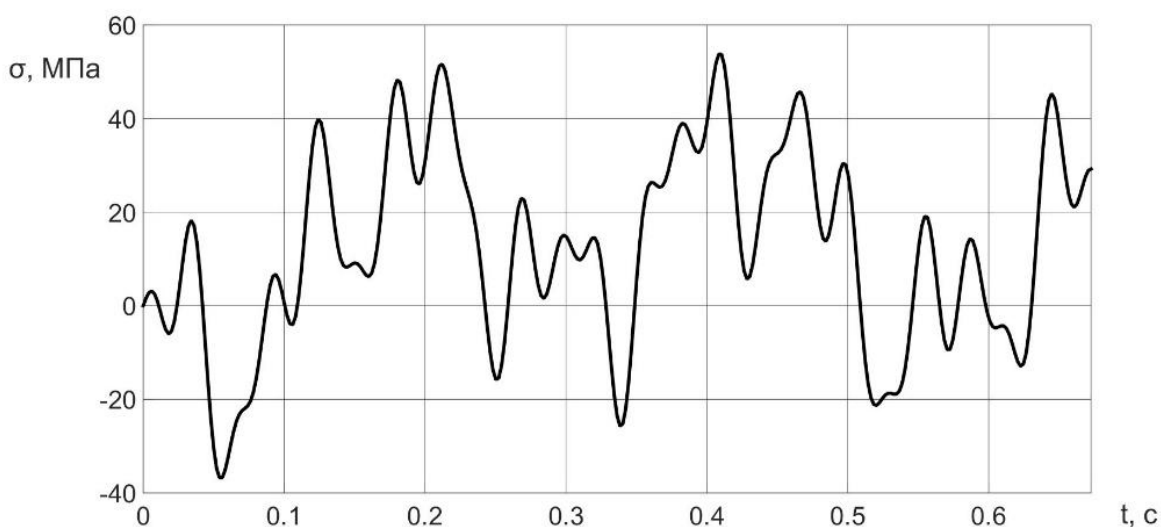


Рис. 39. Напряжения около восемнадцатого отсека лопасти

На рис. 40 показаны напряжения по размаху лопасти для различных моментов времени.

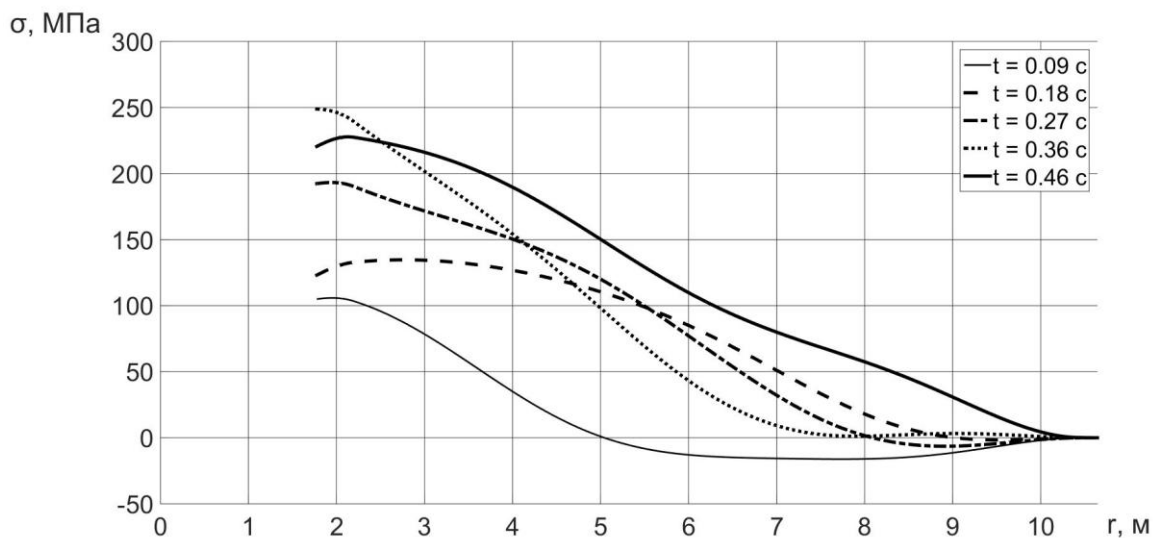


Рис. 40. Напряжения по размаху лопасти во время удара

В различные моменты времени распределение напряжений по размаху с учетом реального распределения масс и жесткостей качественно меняется по сравнению с идеализированным (см. рис. 32). Кривизна лопасти в разные моменты времени изменяет не только свою величину, но даже знак.

Рассмотренный наземный случай нагружения может быть определяющим по прочности для лонжерона лопасти.

Для сравнения уровня напряженного состояния в лонжероне приведем результаты расчета напряжения на режиме висения вертолета. При висении вертолета лопасти описывают так называемый конус вращения, который можно охарактеризовать углом взмаха лопасти β_l (рис. 41).

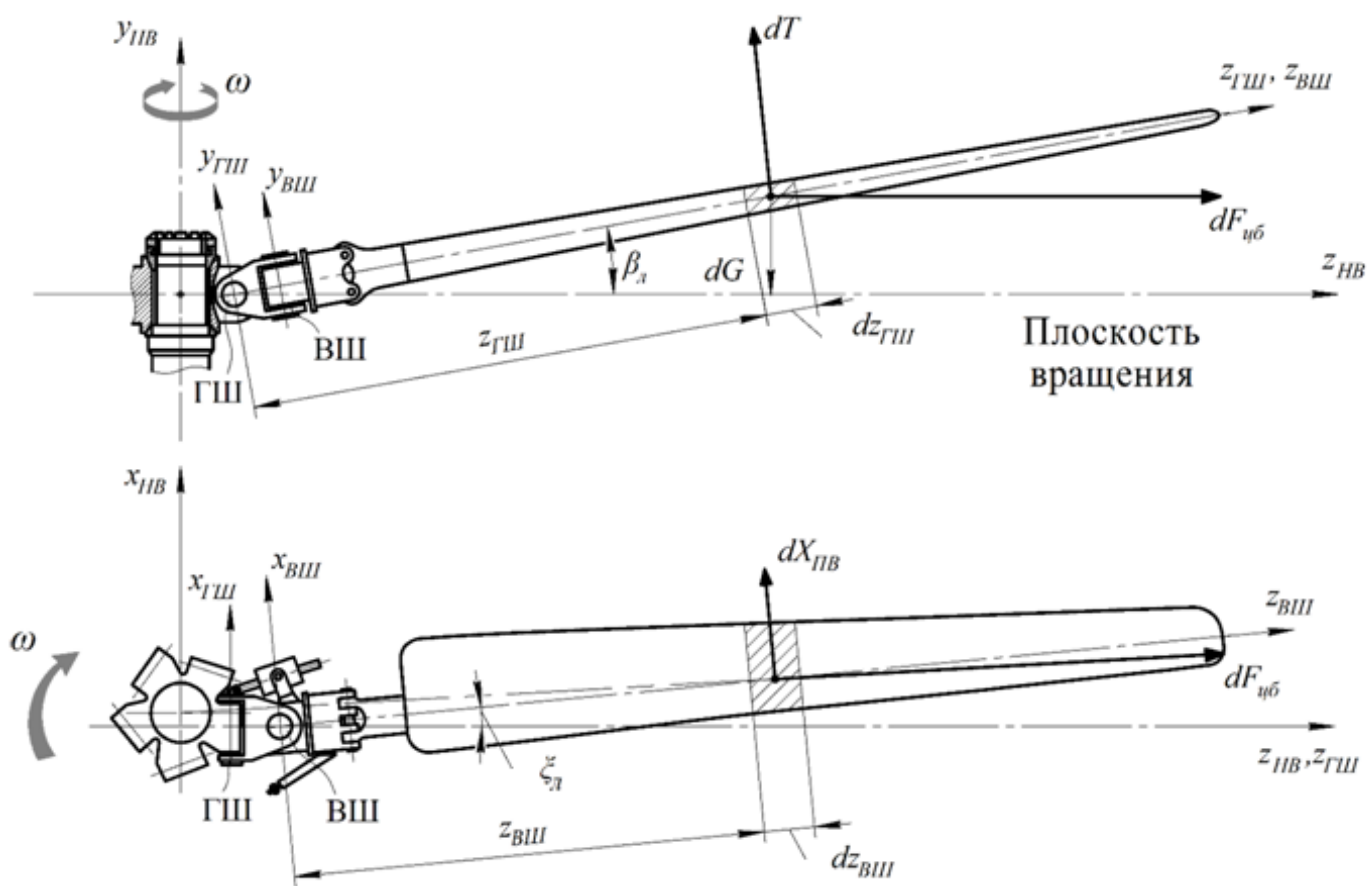


Рис. 41. Силы, действующие на лопасть при висении

Угол взмаха сохраняет постоянное значение при различных азимутальных положениях лопасти. Кроме того, лопасть относительно ВШ отклоняется на постоянной угол ξ_l . Углы β_l и ξ_l определяют из условия равновесия лопасти.

На лопасть действуют распределенные поверхностные (аэродинамические) и массовые (инерционные) силы. К массовым относятся силы тяжести и на порядок большие центробежные силы:

dT – элементарная сила тяги, перпендикулярная лопасти и расположенная в вертикальной плоскости;

$dX_{ПВ}$ – элементарная сила лобового сопротивления, расположенная в плоскости, параллельной плоскости вращения НВ;

dG – элементарная сила тяжести отсека;

$dF_{ЦБ}$ – элементарная сила инерции (центробежная сила).

Поверхностные и массовые силы вызывают нагружение основного силового элемента – лонжерона.

Определим нормальные напряжения вдоль радиуса лопасти в четырех точках, расположенных вблизи пересечения главных центральных осей со средней линией сечения (рис. 29).

Напряжение определяют по формуле

$$\sigma_i = \left(\frac{M_x}{I_x} y_i - \frac{M_y}{I_y} x_i \right) + \frac{N}{F}, \quad (46)$$

где F, I_x, I_y – геометрические характеристики сечения;

x_i, y_i – координаты расчетной точки;

$M_x(z), M_y(z)$ – изгибающие моменты; $N(z)$ – осевая (продольная) сила (рис. 42).

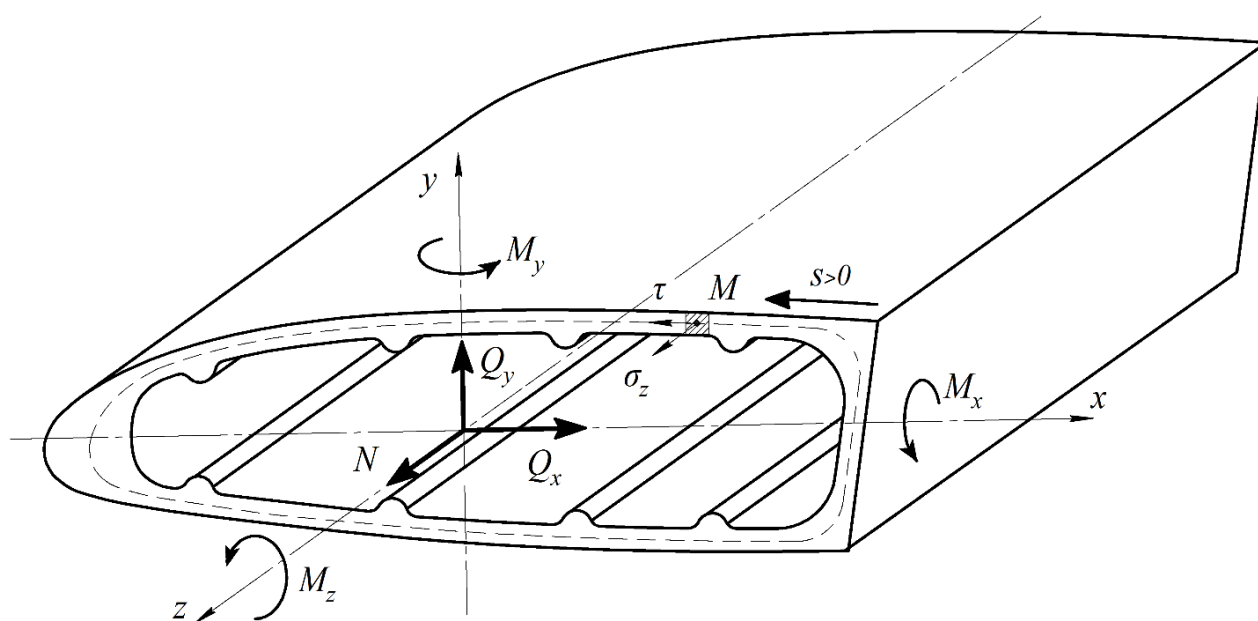


Рис. 42. Внутренние силовые факторы в сечении лонжерона

Рассмотрим висение вертолета ($H = 0$) со взлетной массой 11100 кг при стандартных атмосферных условиях. Угол общего шага несущего винта, необходимый для режима висения, в результате расчетов составляет $\varphi_0 = 13,7^\circ$, а углы взмаха и качания лопасти $\beta = 3,74^\circ$ и $\xi = 7,27^\circ$.

На рис. 43 показано изменение местного угла атаки лопасти и индуктивной скорости в различных сечениях. Лопасть имеет геометрическую крутку, что обеспечивает закон распределения местного угла атаки и индуктивной скорости.

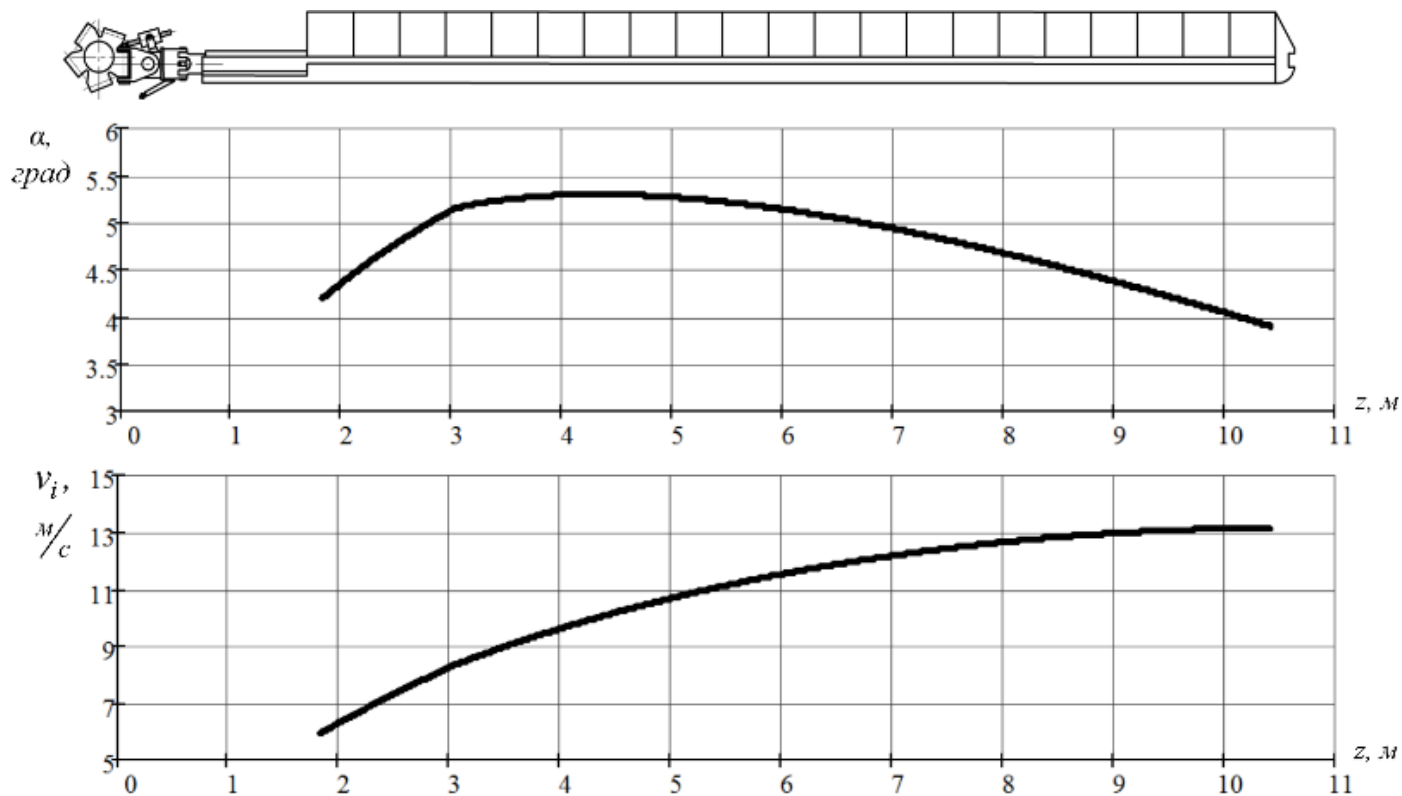


Рис. 43. Изменение местного угла атаки и индуктивной скорости потока по размаху

Изменение проекции главного вектора внутренних сил на связанные оси вдоль лопасти показано на рис. 44. Поперечные силы Q_x и Q_y изменяются как по величине, так и по направлению. Продольная сила N , связанная главным образом с действием центробежных сил, на два порядка больше и вызывает работу лонжерона на растяжение.

В месте размещения противофлаттерного груза характер эпюр меняется, что объясняется действием дополнительных сил инерции противофлаттерного груза.

Величина сил, передаваемых на втулку через ГШ, численно равна Q_x , Q_y и N при $z = 0$. Очевидно, что сумма проекций на ось втулки сил $Q_{y_i}(0)$ и $N_i(0)$ по всем лопастям ($i = 1..5$) – это тяга НВ.

Величина напряжений в указанных точках лонжерона показана на рис. 45. Видно, что возле ВШ и на конце лопасти, где изгибающие моменты малы, напряжения во всех точках практически одинаковы и определяются величиной продольной силы N . В средней части лопасти, где M_x и M_y велики, нормальные напряжения существенно отличаются.

На рис. 46 показано изменение изгибающих моментов M_x и M_y , которые равны нулю в горизонтальном и вертикальном шарнирах и достигают наибольших величин в средней части лопасти.

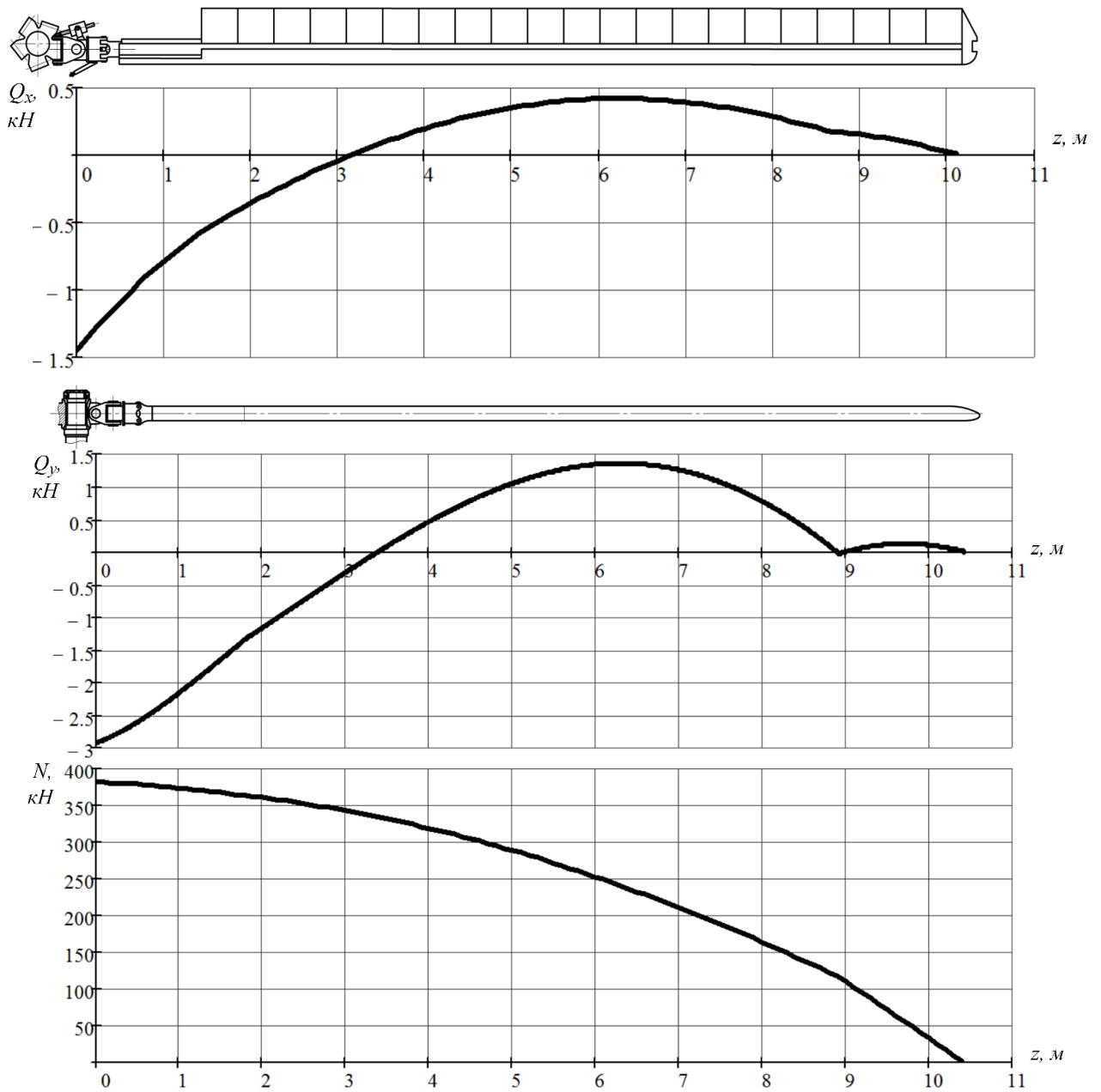


Рис. 44. Проекции главного вектора внутренних сил

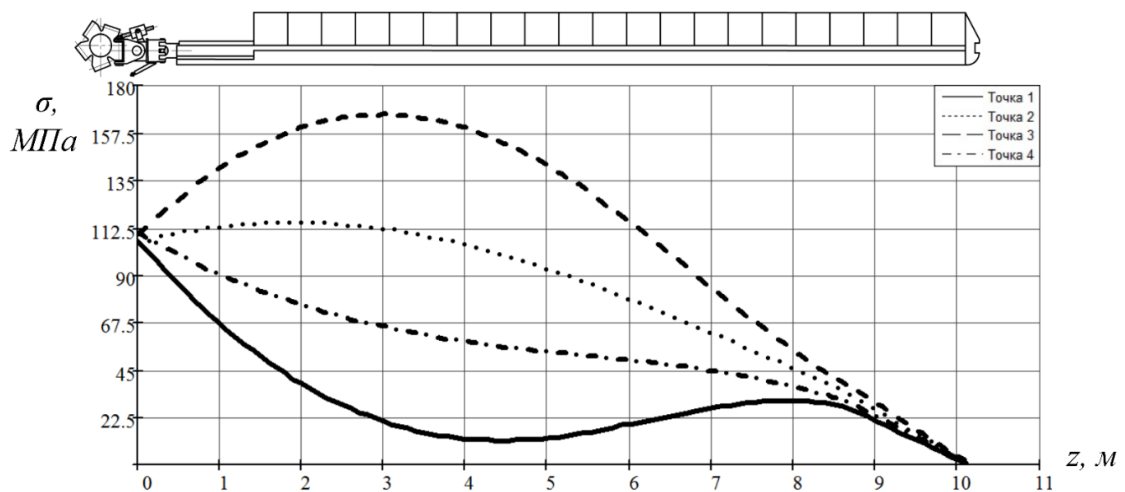


Рис. 45. Нормальные напряжения в лонжероне

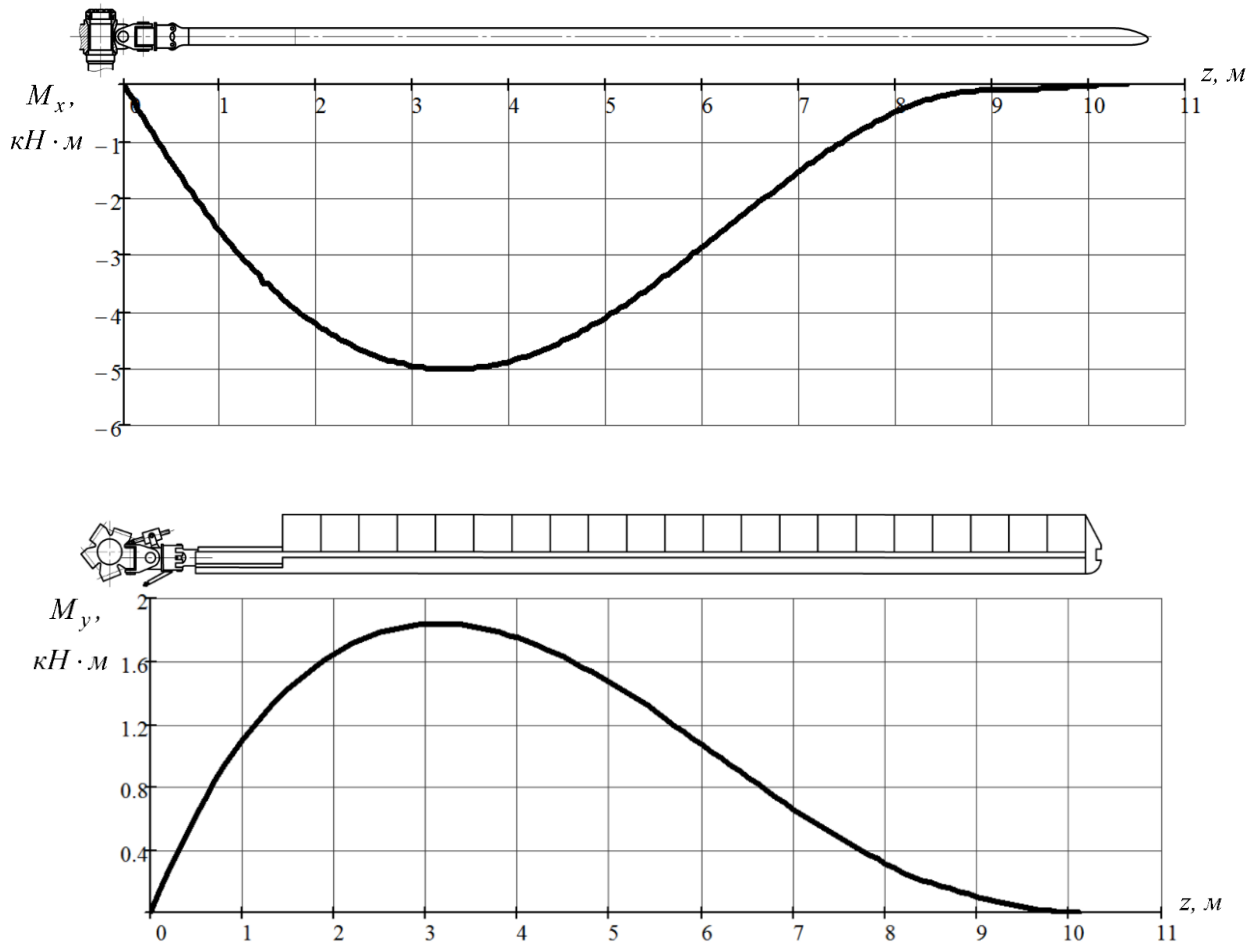


Рис. 46. Изгибающие моменты в плоскостях тяги и вращения

На рис. 47 показаны напряжения от момента M_x , на рис. 48 – от M_y , на рис. 49 – совместно от моментов M_x и M_y . Отметим, что напряжения от момента M_y в три-четыре раза меньше, чем напряжения от M_x .

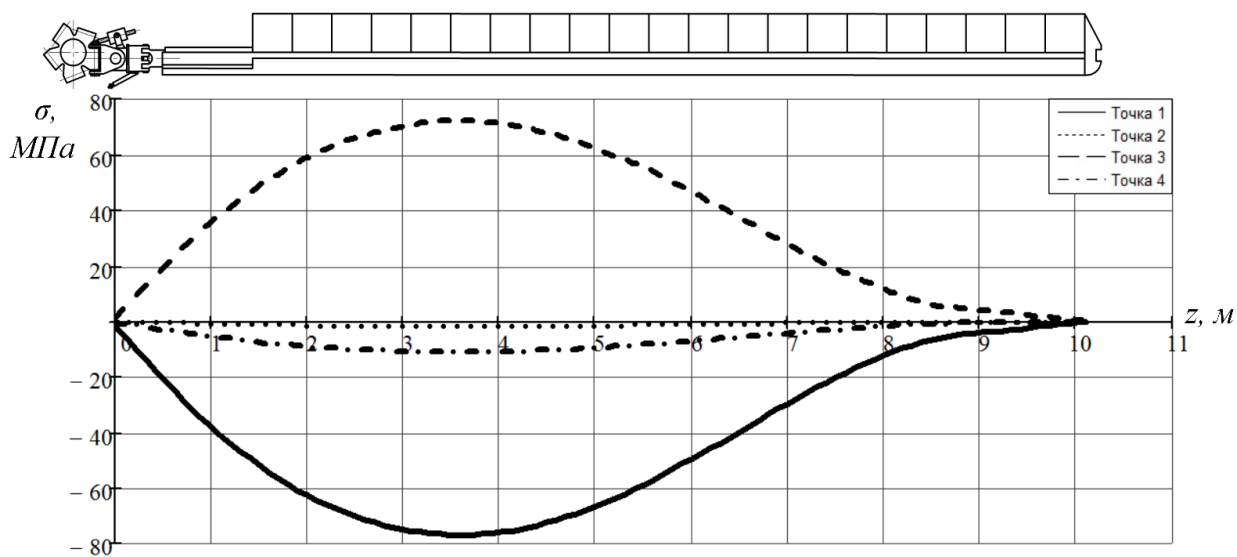


Рис. 47. Нормальные напряжения, вызванные изгибающим моментом M_x

Сопоставление напряженного состояния лонжерона для случаев висения вертолета в воздухе и на земле, при ударе об ограничитель невращающейся непришвартованной лопасти показывает, что падение лопасти в наземных условиях на центробежный ограничитель свеса приводит к очень большим динамическим нагрузкам и напряжениям, а также к повреждению силовых элементов несущей системы.

В случае висения центробежная сила, действующая в сечениях вращающейся лопасти, на порядок больше воздушной нагрузки, она как бы повышает изгибную жесткость лонжерона и снижает напряжения в нем. При ударе силы инерции масс, действующие в вертикальной плоскости вместе с силами тяжести, нагружают лонжерон.

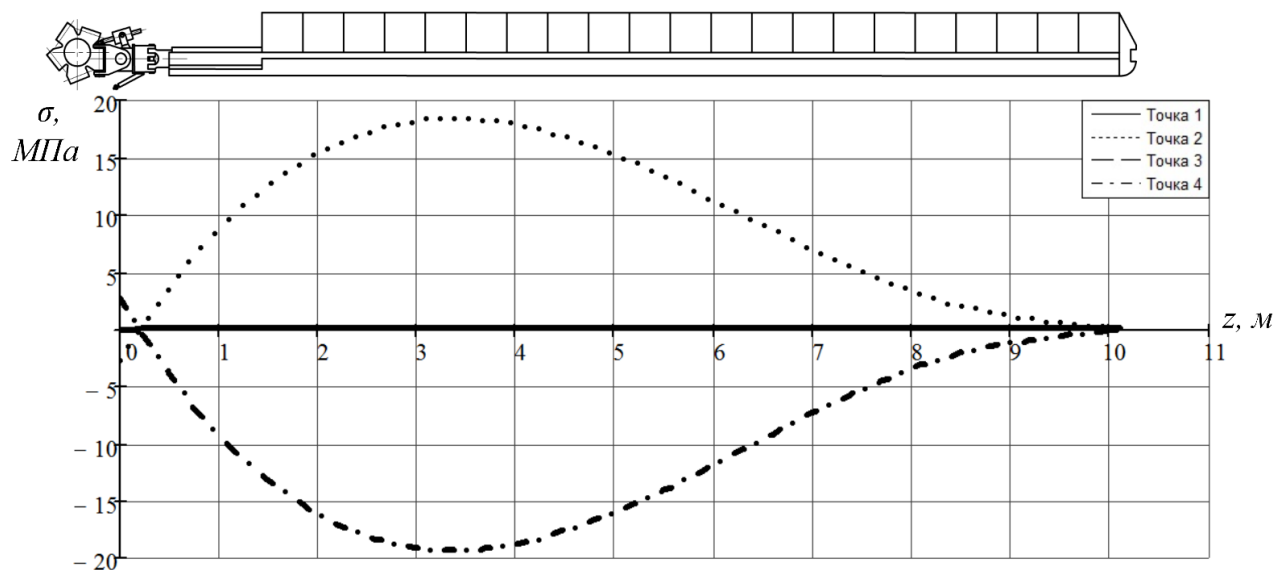


Рис. 48. Нормальные напряжения, вызванные только изгибающим моментом M_y

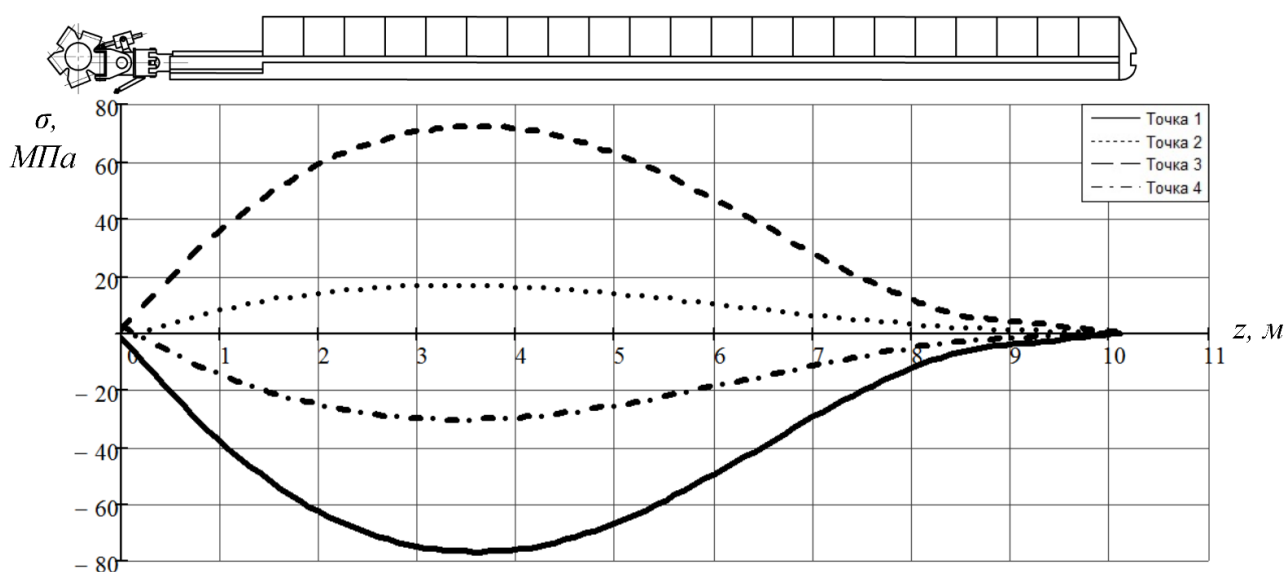


Рис. 49. Нормальные напряжения, вызванные изгибающими моментами M_x и M_y

3.4.3. Расчет собственных характеристик невращающейся лопасти на основе метода дискретизации

Для реальных лопастей характерно неравномерное распределение погонной массы и изгибной жесткости, поэтому далее воспользуемся приближенным способом расчета их собственных характеристик – методом дискретизации.

Задача расчета собственных колебаний невращающейся лопасти – геометрически линейная. Метод дискретизации заключается в представлении лопасти в виде совокупности дискретных масс, каждая из которых в силу принципа суперпозиции вносит свой вклад в деформирование лопасти. Поэтому лопасть можно считать упругим безмассовым «скелетом», нагруженным дискретными силами инерции.

Определим частоты и формы собственных колебаний невращающейся шарнирно закрепленной лопасти (рис. 50).

Особенность расчета динамических характеристик незакрепленной лопасти поясним на примере невесомой лопасти, несущей три сосредоточенные массы m_i , $i = 1, 2, 3$. Жесткость EI лопасти (балки) примем постоянной по длине.

Система имеет три степени свободы, одна из них соответствует вращению балки как жесткой вокруг ГШ. Для нахождения двух остальных колебательных форм рассмотрим систему в положении амплитудных отклонений A_1 , A_2 и A_3 масс относительно горизонтального положения (рис. 50). Эти формы колебаний появляются из-за действия на невесомую лопасть сил инерции ускоренно движущихся масс.

Силы инерции $F_{ин1} = m_1 p^2 A_1$, $F_{ин2} = m_2 p^2 A_2$ и $F_{ин3} = m_3 p^2 A_3$, действующие на лопасть со стороны масс, должны удовлетворять физическому условию отсутствия момента в ГШ:

$$\begin{aligned} \sum M_{ГШ}(F_{инi}) &= 0; \\ m_1 p^2 A_1 r_1 + m_2 p^2 A_2 r_2 + m_3 p^2 A_3 r_3 &= 0, \end{aligned}$$

где r_1 , r_2 и r_3 – плечи масс относительно ГШ;

p – частота собственных колебаний.

Кроме того, силы инерции $F_{ин1} = m_1 p^2 A_1$, $F_{ин2} = m_2 p^2 A_2$ и $F_{ин3} = m_3 p^2 A_3$ деформируют систему.

Так как балка не закреплена, то для определения форм колебаний одну из сил инерции будем считать фиктивной опорой.

Силы $F_{ин1}$ и $F_{ин2}$ можно рассматривать приложенными к двухопорной балке, для которой сила $F_{ин3}$ должна считаться реакцией опоры. В этом случае можно найти упругие деформации в точках 1 и 2, вызванные силами инерции (см. рис. 50):

$$y_{упр1} = A_1 - \frac{r_1}{r_3} A_3;$$

$$y_{упр2} = A_2 - \frac{r_2}{r_3} A_3.$$

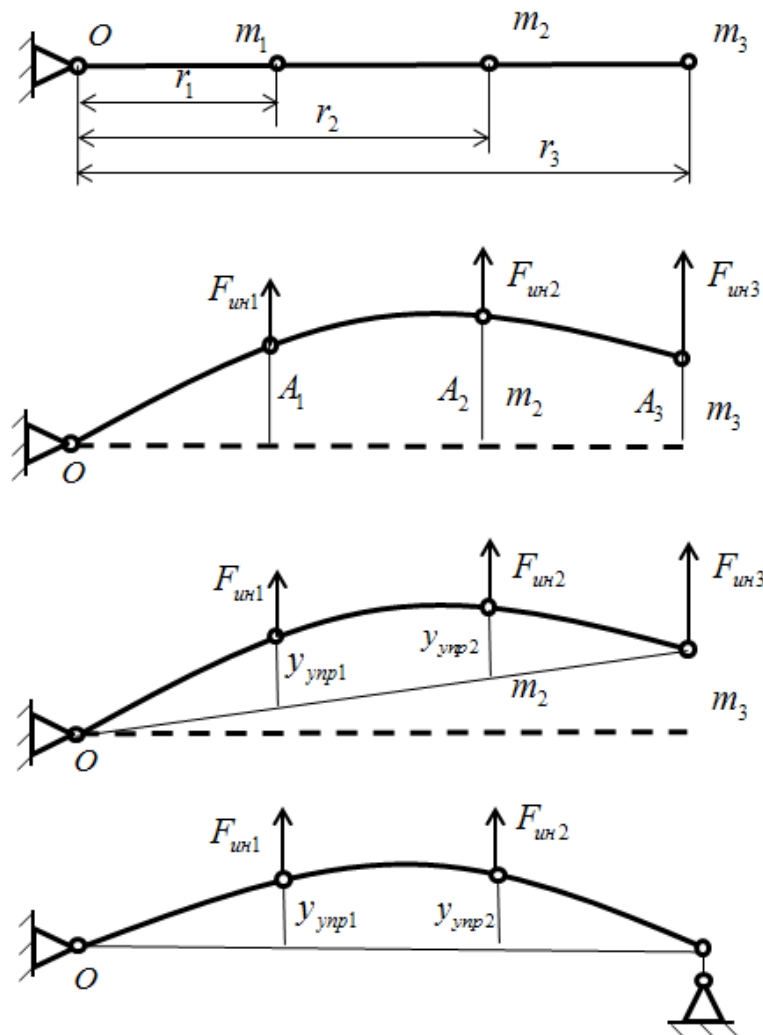


Рис. 50. Шарнирно закрепленная невращающаяся лопасть

При отсутствии центробежных сил (лопасть не вращается) выполняется принцип суперпозиции для действующих сил: сначала нужно определить деформацию системы от каждой из действующих сил по отдельности, а затем сложить рассчитанные упругие перемещения. Для линейно деформируемой упругой системы справедливы следующие соотношения между силами и упругими перемещениями:

$$A_1 - \frac{r_1}{r_3} A_3 = F_{ин1} \delta_{11} + F_{ин2} \delta_{12};$$

$$A_2 - \frac{r_2}{r_3} A_3 = F_{ин1} \delta_{21} + F_{ин2} \delta_{22},$$

где δ_{ij} – коэффициенты влияния (податливости), численно равные перемещению в точке i от единичной силы, приложенной в точке j . Коэффициенты влияния определяют с использованием интеграла Мора.

Подставляя выражения для сил инерции, находим

$$A_1 - \frac{r_1}{r_3} A_3 = m_1 p^2 \delta_{11} A_1 + m_2 p^2 \delta_{12} A_2;$$

$$A_2 - \frac{r_2}{r_3} A_3 = m_1 p^2 \delta_{21} A_1 + m_2 p^2 \delta_{22} A_2.$$

Вычисляем коэффициенты влияния, прикладывая единичные силы в точках 1 и 2 балки с дополнительной опорой в точке 3.

Таким образом, система трех уравнений связывает четыре неизвестные – три амплитуды свободных колебаний A_1, A_2, A_3 и их частоту p :

$$m_1 p^2 A_1 r_1 + m_2 p^2 A_2 r_2 + m_3 p^2 A_3 r_3 = 0;$$

$$A_1 - \frac{r_1}{r_3} A_3 = m_1 p^2 \delta_{11} A_1 + m_2 p^2 \delta_{12} A_2;$$

$$A_2 - \frac{r_2}{r_3} A_3 = m_1 p^2 \delta_{21} A_1 + m_2 p^2 \delta_{22} A_2.$$
(47)

Система линейных однородных алгебраических уравнений (47) относительно неизвестных A_i имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Условие равенства нулю определителя из коэффициентов при амплитудах позволяет найти так называемое частотное уравнение третьей степени относительно p^2 . Механическая система имеет три степени свободы и три частоты собственных колебаний.

Решение частотного уравнения показано на рис. 51 при таких исходных данных: дискретные массы – $m_1 = 80$, $m_2 = 40$ и $m_3 = 20$ кг; изгибная жесткость – $EI = 390 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$; расстояния масс до ГШ – $r_1 = 3,5$, $r_2 = 7,0$ и $r_3 = 10,5$ м.

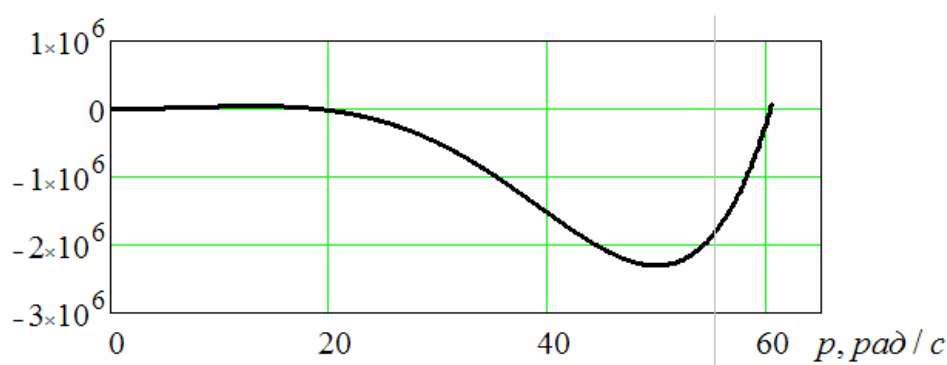


Рис. 51. Определение частоты собственных колебаний

Частоты колебаний: $p_1 = 0$; $p_2 = 18,9$; $p_3 = 60,37$ рад/с. Нулевой частоте соответствует движение лопасти без деформации, т. е. вращение как твердое тело вокруг ГШ.

Каждой собственной частоте p_k соответствует определенная форма колебаний, т. е. соотношение между амплитудными перемещениями A_i . На рис. 52 показаны два тона упругих колебаний.

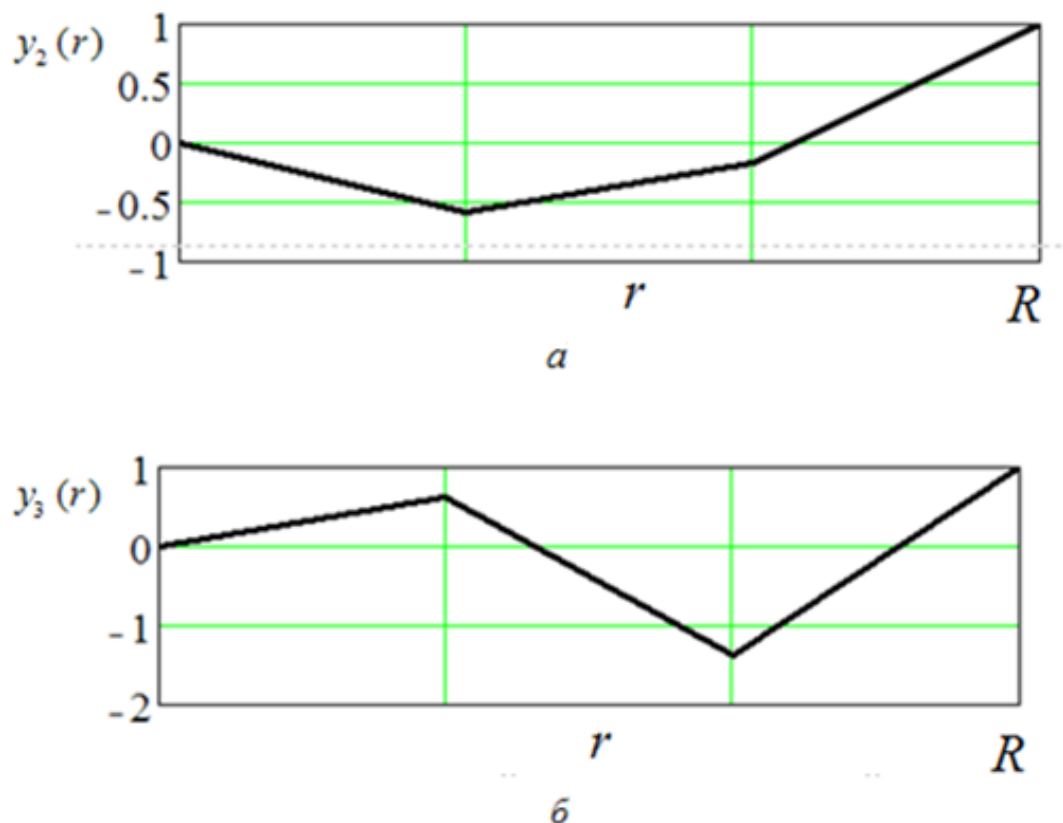


Рис. 52. Формы собственных упругих колебаний лопасти:
а – первый тон упругих колебаний; б – второй тон упругих колебаний

Формы движения системы нормированы так, что перемещение конца лопасти равно единице.

Для адекватного моделирования динамических характеристик лопасти следует увеличивать количество сосредоточенных масс на модели. При увеличении количества дискретных масс до 40 – 100, равномерно распределенных по длине однородной лопасти, получим частоты и формы колебаний, близкие к точным решениям.

Определим частоты и формы собственных колебаний лопасти на основе метода дискретизации, для которой справедлив произвольный характер изменения погонной массы и изгибной жесткости. В целях упрощения будем считать, что изгибные и крутильные колебания лопасти не связаны между собой, т. е. ее можно представить в виде дискретных масс, распределенных вдоль оси жесткости.

На рис. 53 показана дискретная модель лопасти, шарнирно прикрепленной к втулке НВ. К невесомой балке переменной жесткости $EI(z)$ прикреплены дискретные массы m_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Будем считать их сосредоточенными.

Расчетная модель характеризуется n степенями свободы, в качестве которых возьмем вертикальные перемещения y_i масс.

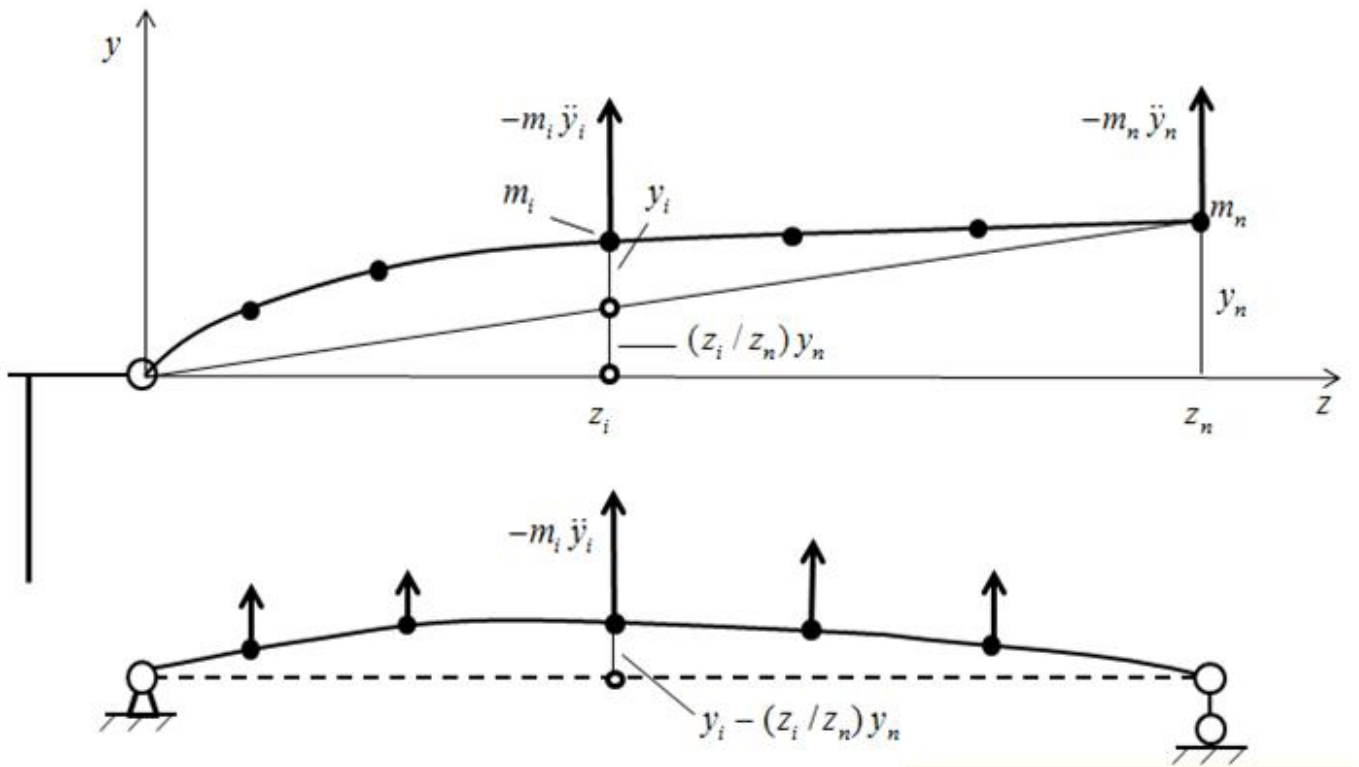


Рис. 53. Дискретная модель лопасти

Балка нагружена силами инерции $(-m_i \ddot{y}_i)$, деформирующими лопасть. Лопасть – незакрепленная, поэтому при расчете упругих деформаций удобно считать ее опирающейся не только на реальный шарнир НВ, но и на дополнительную (фиктивную) опору на конце лопасти, реакция которой равна силе инерции $(-m_n \ddot{y}_n)$ массы n .

Уравнения движения механической системы в процессе свободных колебаний имеют вид

$$m_1 \ddot{y}_1 z_1 + m_2 \ddot{y}_2 z_2 + \dots + m_n \ddot{y}_n z_n = 0;$$

$$y_1 - \frac{z_1}{z_n} y_n = \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2 \ddot{y}_2) + \dots + \delta_{1,n-1}(-m_{n-1} \ddot{y}_{n-1});$$

$$y_2 - \frac{z_2}{z_n} y_n = \delta_{21}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2 \ddot{y}_2) + \dots + \delta_{2,n-1}(-m_{n-1} \ddot{y}_{n-1}); \quad (48)$$

...

$$y_{n-1} - \frac{z_{n-1}}{z_n} y_n = \delta_{n-1,1}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{n-1,2}(-m_2 \ddot{y}_2) + \dots + \delta_{n-1,n}(-m_{n-1} \ddot{y}_{n-1}).$$

Первое уравнение указывает на отсутствие момента в шарнире в любой момент времени, а остальные $n - 1$ позволяют найти упругие деформации,

вызванные силами инерции. Коэффициенты податливости рассчитывают для упругой модели закрепленной балки, показанной на рис. 53.

Используя матричные обозначения, введем квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -z_1/z_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -z_2/z_n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -z_3/z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -z_{n-1}/z_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

матрицы податливости

$$\delta = \begin{pmatrix} -\delta_{11} & -\delta_{12} & \dots & -\delta_{1,n-1} & 0 \\ -\delta_{21} & -\delta_{22} & \dots & -\delta_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\delta_{n-1,1} & -\delta_{n-1,2} & \dots & -\delta_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

масс

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{n-1} & 0 \\ m_1 z_1 & m_2 z_2 & \dots & \dots & m_{n-1} z_{n-1} & m_n z_n \end{pmatrix}$$

и вектор-столбец неизвестных перемещений

$$Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{Bmatrix}. \quad (49)$$

Задача может быть сведена к решению матричного уравнения

$$A Y = \delta M \ddot{Y}. \quad (50)$$

Обозначим

$$B = \delta M,$$

тогда

$$B^{-1} A Y = \ddot{Y}.$$

Введя обозначение для произведения матриц

$$C = B^{-1} A,$$

получаем

$$C Y = \ddot{Y}.$$

При свободных колебаниях каждая точка движется по гармоническому закону

$$y = A \sin pt, \quad (51)$$

тогда

$$\dot{Y} = (-1) p^2 \sin pt A,$$

где A – вектор-столбец амплитуд колебаний.

Подставив выражение (51) в (50), находим уравнение, сводящееся к задаче на собственные значения

$$C A = p^2 A, \quad (52)$$

где p^2 – собственное число для матрицы C . Из матричного уравнения (52) следует, что матрица C преобразует вектор A в коллинеарный.

При достаточно большом количестве дискретных масс можно найти решение, приближающееся к точному решению, если воспользоваться моделью однородной лопасти.

Сравним точные и приближенные решения, воспользовавшись моделью однородной лопасти при степени дискретизации $n = 100$. Для однородной балки ($EI = 390 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$, $m_{\text{п}} = 13,2 \text{ кг/м}$) точные и приближенные значения частот первых тонов упругих колебаний соответственно равны (приближенные значения указаны в скобках): $p_1 = 24,03$ (23,128), $p_2 = 77,87$ (74,94) и $p_3 = 162,47$ (156,07) рад/с.

3.4.4. Расчет собственных характеристик невращающейся лопасти на основе метода последовательных приближений

Решение интегрального уравнения колебаний

Для реальных лопастей жесткости и массы распределены по радиусу неравномерно. Аналитического решения уравнения (22) для такого случая не известно. В этом случае можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Предполагая, что

$$y = \bar{y} \sin pt, \quad (53)$$

и подставляя в формулу (2.7) соотношение (53), получаем для амплитудных отклонений

$$[EI y'''] - p^2 m y = 0. \quad (54)$$

В формуле (54) опущена черта для амплитуды колебаний \bar{y} .

Перенесем в уравнении (54) второй член в правую часть и дважды проинтегрируем в пределах от R до r с учетом граничных условий:

при $r = R$

$$M = EI y'' = 0 \text{ и } Q = [EI y'']' = 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_r^R [EI y'']'' dr &= p^2 \int_r^R m y dr; \\ -[EI y'']'(r) &= p^2 \int_r^R m y dr; \\ -\int_r^R [EI y'']' dr &= p^2 \int_r^R \int_r^R m y dr dr; \\ [EI y''](r) &= p^2 \int_r^R \int_r^R m y dr dr. \end{aligned}$$

Затем разделим левую и правую части на EI и снова дважды проинтегрируем в пределах от 0 до r :

$$\begin{aligned} \int_0^r y'' dr &= p^2 \int_0^r \frac{dr}{EI} \int_r^R \int_r^R m y dr dr; \\ y'(r) - y'(0) &= p^2 \int_0^r \frac{dr}{EI} \int_r^R \int_r^R m y dr dr; \\ \int_0^r y' dr &= p^2 \int_0^r \int_0^r \frac{dr dr}{EI} \int_r^R \int_r^R m y dr dr + y'(0)r; \\ y(r) &= p^2 \int_0^r \int_0^r \frac{dr dr}{EI} \int_r^R \int_r^R m y dr dr + y'(0)r + y(0). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение, связывающее распределение амплитуд при свободных колебаниях:

$$y = p^2 \int_0^r \int_0^r \frac{dr dr}{EI} \int_r^R \int_r^R m y dr dr + C_1 r + C_2, \quad (55)$$

где константы C_1 и C_2 определяют из граничных условий закрепления лопасти.

Рассмотрим жесткую заделку лопасти, при которой $C_1 = C_2 = 0$.

Суть метода последовательных приближений такова. Считаем частоту p известной. Задаемся в правой части уравнения произвольной функцией радиуса $u^{(0)}(r)$ и выполняем интегрирование. Получаем новую функцию

$$u^{(1)}(r) = p^2 \int_0^r \int_0^r \frac{drdr}{EI} \int_r^R \int_r^R mu^{(0)} drdr + C_1 r + C_2. \quad (56)$$

Снова подставляем ее в правую часть выражения (56), находим функцию $u^{(2)}(r)$ и т. д. Этот процесс сходится и $u(r)$ стремится к форме собственных колебаний низшего (первого) тона.

Сначала частота первого тона колебаний неизвестна. Положим в формуле (56) $p^2 = 1$, тогда масштаб кривой $u^{(n)}(r)$ в каждом приближении уменьшается в p^2 раз. Частоту первого тона можно оценить по формуле

$$p^{(1)} = \sqrt{\frac{u^{(1)}(r)}{u^{(0)}(r)}}.$$

Далее вычисления повторяем для принятой в качестве исходной функции $u^{(1)}(r)$ и т. д. Процесс последовательных вычислений прекращаем, когда разница между последовательными частотами $p^{(n)}$ и $p^{(n+1)}$ станет меньше установленной величины (обычно 0,1...0,5 %).

На практике в качестве $u^{(0)}(r)$ часто выбирают линейные функции $u^{(0)}(r) = 1$ или $u^{(0)}(r) = r$. Процесс последовательных приближений сходится всегда к форме низшего тона, какая бы функция $u^{(0)}(r)$ ни была выбрана в качестве первого приближения. Поэтому для нахождения частот и форм более высоких тонов изложенный выше метод непосредственно не применим и должен быть несколько дополнен. На каждом шаге процесса приближения следует выполнить условие ортогональности функции $u(r)$ к низшим, ранее найденным формам колебаний лопасти.

Например, при вычислении частоты и формы второго тона на каждом шаге процесса приближения выполняют условие ортогонализации функции $u^{(n)}(r)$ к найденной ранее форме первого тона. Для этого используют функцию

$$u^{*(n)}(r) = u^{(n)}(r) - c^{(n)} y_1(r), \quad (57)$$

где $c^{(n)}$ – некоторый коэффициент;

$y_1(r)$ – форма колебаний первого тона.

Именно функцию $u^{*(n)}(r)$ берут в качестве исходной и подставляют в правую часть формулы (56).

Коэффициент $c^{(n)}$ определяют из условия ортогональности (37). Функция $u^{*(n)}(r)$ (как приближенная форма второго тона) должна удовлетворять условию

$$\int_0^R u^{*(n)}(r) y_1(r) dr = 0. \quad (58)$$

С учетом функции (57)

$$\int_0^R m u^{*(n)}(r)y_1(r)dr = \int_0^R m u^{(n)}(r)y_1(r)dr - c^{(n)} \int_0^R m y_1^2(r)dr = 0.$$

Отсюда

$$c^{(n)} = \frac{\int_0^R m u^{(n)}(r)y_1(r)dr}{\int_0^R m y_1^2(r)dr}.$$

Таким образом, уравнение (55) решаем методом последовательных приближений. Задаемся произвольной формой y , нормированной определенным образом, чаще всего $y(R) = 1$, и подставляем ее в правую часть уравнения. После интегрирования получаем функцию

$$u = \int_0^r \int_0^r \frac{drdr}{EI} \int_r^R \int_r^R mydrdr, \quad (59)$$

такую, что $y = p^2 u$.

Учитывая нормировку, находим квадрат частоты

$$p^2 = \frac{1}{u(R)}. \quad (60)$$

Далее, определив новую функцию $y(r)$, используем ее в уравнении (3.4) и т. д. После выполнения описанных операций несколько раз форма колебаний и частота будут сходиться к значениям, которые являются решением интегрального уравнения (55).

Проанализируем физический смысл операций, предусмотренных методом последовательных приближений. Найдем ускорение некоторого элемента лопасти при ее свободных колебаниях по какому-либо тону j . Погонная инерционная нагрузка $q_{ин} = -m y_j p_j^2$. Напомним, что y_j – это амплитудное отклонение. Из этого выражения следует, что инерционная нагрузка в каждом сечении имеет амплитуду, пропорциональную $m y_j$. Используя известную из курса сопротивления материалов формулу, находим

$$M = - \int_r^R \int_r^R mydrdr. \quad (61)$$

Таким образом, первые два интегрирования в (59) можно рассматривать как определение амплитуды изгибающего момента по заданным амплитудам инерционной погонной нагрузки. Поэтому формулу (59) можно переписать в виде

$$u = \int_0^r \int_0^r \frac{Mdrdr}{EI} + C_1 r + C_2. \quad (62)$$

Следовательно, два последних интегрирования можно рассматривать как нахождение амплитуд колебаний по заданным амплитудам изгибающих моментов.

Итак, расчет по методу последовательных приближений можно интерпретировать как последовательное вычисление амплитуд моментов по заданным амплитудам перемещений с последующим определением новых амплитуд перемещений по найденным амплитудам моментов.

Расчет форм и частот собственных колебаний балочной модели лопасти с дискретно распределенными параметрами

Для расчета используем модель балочного типа с сосредоточенными грузами. Для этого лопасть разделим на n участков. Длины участков могут быть различными. Массу лопасти сосредоточим по краям этих участков в виде отдельных дискретных грузов массой m_i . Изгибную жесткость лопасти представим в виде ступенчатой кривой, остающейся постоянной на протяжении каждого участка (рис. 54).

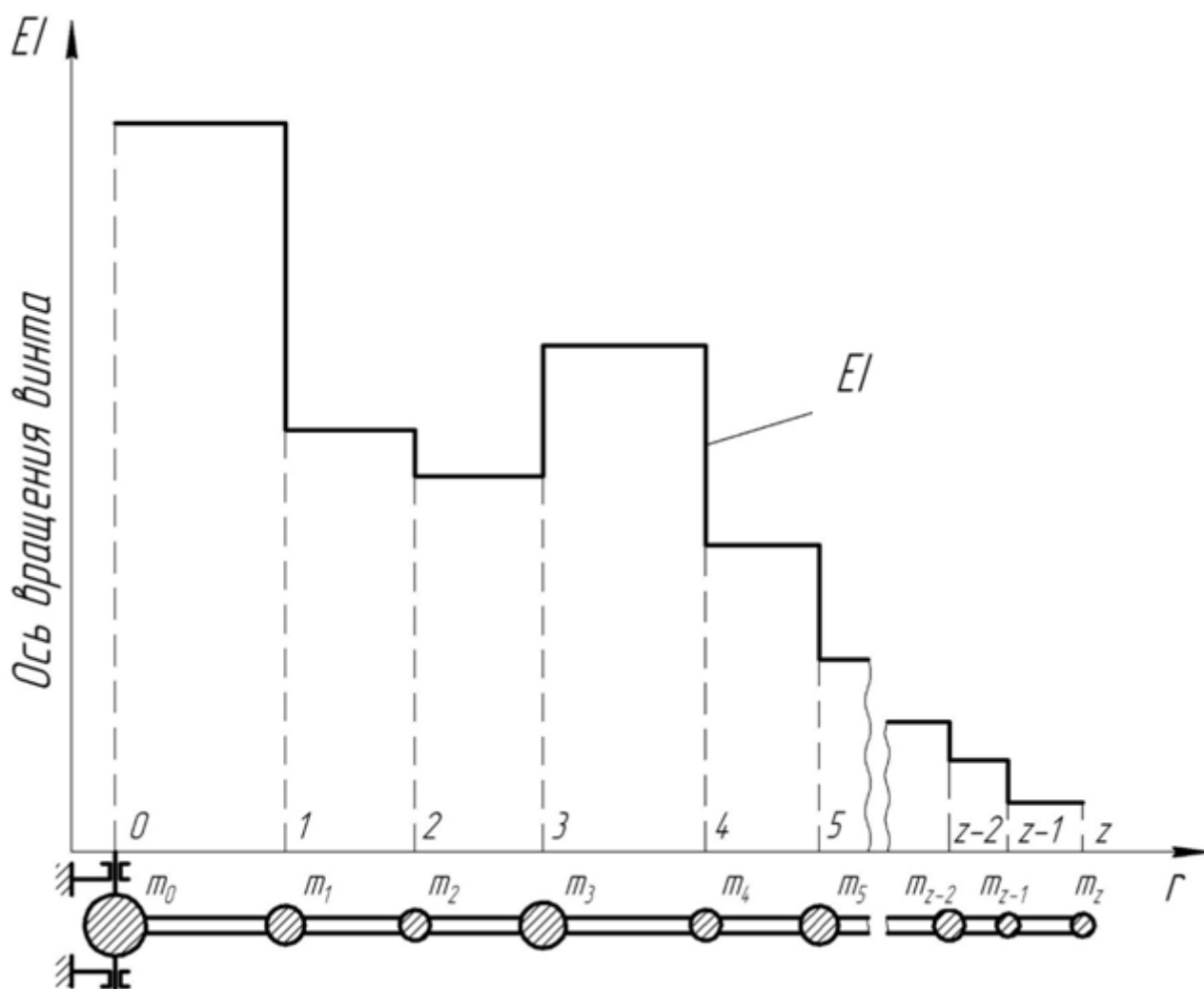


Рис. 54. Расчетная модель лопасти

Сначала рассмотрим случай заделанной в комле лопасти. Зададимся произвольной формой перемещений грузов модели – системой дискретных значений y_i ($i = \overline{1, n}$ – порядковый номер сосредоточенных грузов модели). Нормируем форму колебаний, предполагая, что $y_{r=R} = 1$. Так как перемещения y_i известны, то можно вычислить инерционные силы грузов при их колебаниях с частотой $p = 1$ по выражению

$$F_i = m_i y_i. \quad (63)$$

Зная инерционные силы, можно определить все изгибающие моменты, действующие на соответствующие сосредоточенные элементы, по рекуррентным формулам.

Запишем выражения для моментов, действующих на i , $i+1$ и $i+2$ элементы:

$$M_{i+2} = \sum_{k=i+3}^n F_k \sum_{j=k}^n l_{j-1, j};$$

$$M_{i+1} = \sum_{k=i+2}^n F_k \sum_{j=k}^n l_{j-1, j} = M_{i+2} + \sum_{k=i+2}^n F_k l_{i+1, i+2},$$

откуда

$$\sum_{k=i+2}^n F_k = \frac{M_{i+1} - M_{i+2}}{l_{i+1, i+2}};$$

$$M_i = \sum_{k=i+1}^n F_k \sum_{j=k}^n l_{j-1, j} = F_{i+1} l_{i, i+1} + \sum_{k=i+2}^n F_k \sum_{j=k}^n l_{j-1, j} + \sum_{k=i+2}^n F_k l_{i, i+1} =$$

$$= l_{i, i+1} \left(F_{i+1} + \frac{M_{i+1}}{l_{i, i+1}} + \frac{M_{i+1} - M_{i+2}}{l_{i+1, i+2}} \right).$$

Окончательно получим

$$M_i = l_{i, i+1} (F_{i+1} - a_{i+1} M_{i+1} - b_{i+1} M_{i+2}), \quad (64)$$

где M_i – изгибающий момент, действующий в месте расположения i -й массы;
 $l_{i, i+1}$ – длина участка лопасти между i и $i+1$ сосредоточенными массами;
 a_i , b_i – коэффициенты, которые определяют по формулам

$$b_i = \frac{1}{l_{i, i+1}};$$

$$a_i = -b_{i-1} - b_i.$$

Вычислять изгибающие моменты с помощью выражения (64) следует с конца лопасти, приняв начальное значение $i = z - 1$, а изгибающие моменты M_z и M_{z+1} равными нулю.

Определив распределение изгибающих моментов по длине лопасти, переходим к нахождению ее деформации. Деформации лопасти при колебаниях с частотой $p = 1$ обозначим буквой u .

Для вывода рекуррентной формулы расчета деформаций запишем дифференциальное уравнение деформации изгиба на участке лопасти между $i-1$ и i -й массами:

$$EI_{i-1,i} u''(x) = M_{i-1} + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_{i-1,i}} x. \quad (65)$$

Проинтегрируем данное уравнение дважды:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{M_{i-1}}{EI_{i-1,i}} x + \frac{M_i - M_{i-1}}{2EI_{i-1,i} l_{i-1,i}} x^2 + C_1; \\ u(x) &= \frac{M_{i-1}}{2EI_{i-1,i}} x^2 + \frac{M_i - M_{i-1}}{6EI_{i-1,i} l_{i-1,i}} x^3 + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий:

при $x = 0$:

$$\begin{aligned} u'(0) &= C_1 = u'_{i-1}; \\ u(0) &= C_2 = u_{i-1}; \end{aligned}$$

при $x = l_{i-1,i}$:

$$u'(l_{i-1,i}) = u'_i = \frac{M_{i-1}}{EI_{i-1,i}} l_{i-1,i} + \frac{M_i - M_{i-1}}{2EI_{i-1,i}} l_{i-1,i} + u'_{i-1}; \quad (66)$$

$$u(l_{i-1,i}) = u_i = \frac{M_{i-1}}{2EI_{i-1,i}} l_{i-1,i}^2 + \frac{M_i - M_{i-1}}{6EI_{i-1,i}} l_{i-1,i}^2 + u'_{i-1} l_{i-1,i} + u_{i-1}. \quad (67)$$

Аналогично запишем для участка лопасти между $(i-1)$ -й и $(i-2)$ -й массами:

$$u'(l_{i-2,i-1}) = u'_{i-1} = \frac{M_{i-2}}{EI_{i-2,i-1}} l_{i-2,i-1} + \frac{M_{i-1} - M_{i-2}}{2EI_{i-2,i-1}} l_{i-2,i-1} + u'_{i-2}; \quad (68)$$

$$u(l_{i-2,i-1}) = u_{i-1} = \frac{M_{i-2}}{2EI_{i-2,i-1}} l_{i-2,i-1}^2 + \frac{M_{i-1} - M_{i-2}}{6EI_{i-2,i-1}} l_{i-2,i-1}^2 + u'_{i-2} l_{i-2,i-1} + u_{i-2}. \quad (69)$$

Из последнего соотношения выразим производную u'_{i-2} и подставим в формулу (69):

$$u'_{i-1} = \frac{M_{i-2} l_{i-2,i-1}}{EI_{i-2,i-1}} + \frac{M_{i-1} - M_{i-2}}{2EI_{i-2,i-1}} l_{i-2,i-1} + \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{l_{i-2,i-1}} - \frac{M_{i-2} l_{i-2,i-1}}{2EI_{i-2,i-1}} - \frac{M_{i-1} - M_{i-2}}{6EI_{i-2,i-1}} l_{i-2,i-1}.$$

После преобразований получим

$$u'_{i-1} = \frac{M_{i-2}l_{i-2,i-1}}{2EI_{i-2,i-1}} + \frac{M_{i-1} - M_{i-2}}{3EI_{i-2,i-1}}l_{i-2,i-1} + \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{l_{i-2,i-1}}. \quad (70)$$

Подставим выражение (70) в (69) и после преобразований получим

$$u_i = l_{i-1,i} \left(\frac{M_i l_{i-1,i}}{6EI_{i-1,i}} + \frac{M_{i-1} l_{i-1,i}}{3EI_{i-1,i}} + \frac{M_{i-1} l_{i-2,i-1}}{3EI_{i-2,i-1}} + \frac{M_{i-2} l_{i-2,i-1}}{6EI_{i-2,i-1}} + \frac{u_{i-1}}{l_{i-2,i-1}} + \frac{u_{i-1}}{l_{i-1,i}} - \frac{u_{i-2}}{l_{i-2,i-1}} \right).$$

Окончательно рекуррентная формула для определения деформаций имеет вид

$$u_i = l_{i-1,i} (D_{i-1} - b_{i-2}u_{i-2} - a_{i-1}u_{i-1}), \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} D_i &= d_{i-1}M_{i-1} + c_i M_i + d_i M_{i+1}; \\ d_i &= \frac{l_{i,i+1}}{6EI_{i,i+1}}; \\ c_i &= 2(d_{i-1} + d_i). \end{aligned}$$

Коэффициенты a_i и b_i те же, что и в формуле (64).

Расчет деформации u_i начинаем с концы лопасти, записав для принятых граничных условий $u_0 = 0$. Приравниваем к нулю все коэффициенты с отрицательными индексами.

Выполняя расчеты по формулам (3.7) и (3.14) применительно к балочной модели лопасти с дискретным распределением параметров, находим величины деформаций u_i .

Определяем частоту колебаний аналогично (60)

$$p^2 = \frac{1}{u_n}, \quad (72)$$

находим новые значения

$$y_i = p^2 u_i, \quad (73)$$

повторяем все расчетные операции необходимое количество раз. Считаем, что метод последовательных приближений сошелся при выполнении условия

$$\left| \frac{p^{(k)2} - p^{(k-1)2}}{p^{(k-1)2}} \right| \leq \varepsilon, \quad (74)$$

где k – порядковый номер итерации;

ε – малая величина, определяющая точность вычислений.

Условие ортогональности и вычисление последующих тонов собственных колебаний

Метод последовательных приближений приводит к определению низшего тона собственных колебаний. При вычислении следующих тонов необходимо выполнить условия ортогональности колебаний по различным тонам.

Представим, что свободные колебания лопасти в пустоте происходят одновременно по двум формам $y_i^{(j)}$ и $y_i^{(m)}$. Энергию колебаний по каждой из форм в отдельности можно найти по амплитудным значениям кинетической энергии:

$$K_j = \sum_i m_i \left[p_i y_i^{(j)} \right]^2;$$

$$K_m = \sum_i m_i \left[p_m y_i^{(m)} \right]^2.$$
(75)

С другой стороны, полную энергию системы, колеблющейся одновременно по двум формам, можно определить по амплитудному значению суммарной кинетической энергии:

$$K_\Sigma = \sum_i m_i \left[p_i y_i^{(j)} + p_m y_i^{(m)} \right]^2.$$
(76)

Этой кинетической энергией система обладает в тот момент времени, когда лопасть проходит при колебаниях через нейтральное положение одновременно по двум формам $y_i^{(j)}$ и $y_i^{(m)}$.

Если амплитуда по каждой из составляющих форм колебаний не меняется с течением времени, то остается постоянной и их энергия, определенная по формулам (75).

Полная энергия колебаний всегда должна равняться сумме энергий, составляющих движение, т. е.

$$K_\Sigma = K_j + K_m.$$
(77)

Как следует из выражения (76), это возможно только при

$$\sum_i m_i y_i^{(j)} y_i^{(m)} = 0$$
(78)

– условия ортогональности тонов собственных колебаний.

При вычислении какого-либо j -го тона все предыдущие тона, которым соответствует индекс $m = 0, 1, 2, \dots, j - 1$, должны быть уже вычислены.

Для выполнения условия ортогональности формы j -го тона представим так:

$$y_i^{(j)} = p_j^2 \left[u_i - \sum_{m=0}^{m=j-1} C_m y_i^{(m)} \right],$$
(79)

где $y_i^{(m)}$ – уже определенные формы собственных колебаний.

Подставляя выражение (79) в условие (78), получаем формулу для коэффициентов

$$C_m = \frac{\sum_i m_i u_i y_i^{(m)}}{\sum_i m_i \left[y_i^{(m)} \right]^2}.$$
(80)

Значение частоты j -го тона находим из соотношения

$$p_j^2 = \frac{1}{u_z - \sum_{m=0}^{m=j-1} C_m}. \quad (81)$$

Теперь известны все составляющие для определения форм и частот высших тонов собственных колебаний по формуле (79).

Примем, что лопасть крепят к втулке с помощью упругого элемента (например, торсиона), а его жесткость подобрана так, чтобы угол отклонения лопасти под собственным весом во время стоянки на земле был такой же, как на вертолете-прототипе Ми-8.

В этом случае лопасть считают жестко заземленной и к ней можно применять алгоритм без каких-либо дополнений.

Результат расчета собственных форм и частот колебаний жестко закрепленной лопасти (с торсионом) методом последовательных приближений показан на рис. 55.

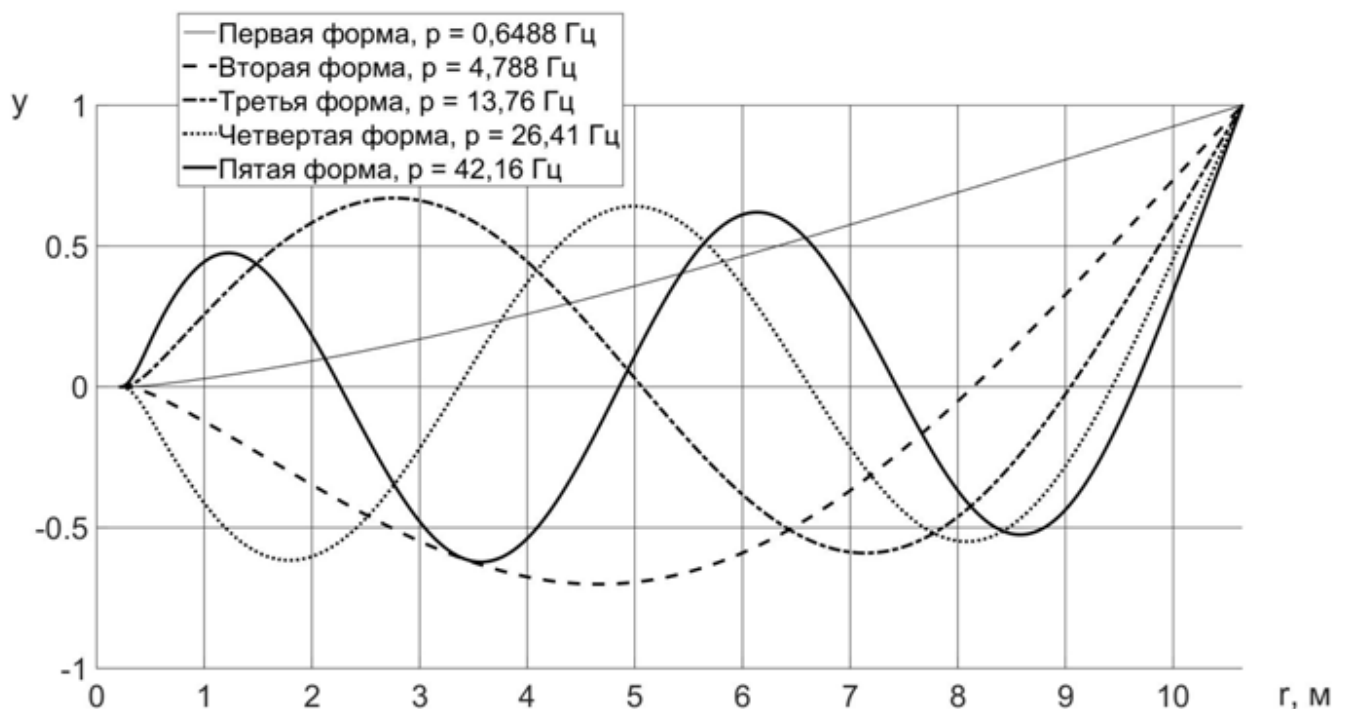


Рис. 55. Изгибные формы и частоты колебаний лопасти при креплении с помощью торсиона

Особенности расчета форм и частот собственных колебаний лопасти с шарнирным закреплением

При шарнирном закреплении лопасти в уравнении (55) константа C_1 принимает ненулевое значение. Тогда амплитуды отклонений лопасти

$$y = p^2 \left(\int_0^r \int_0^r \frac{drdr}{EI} \int_r^R \int_r^R mydrdr + C_1 r \right), \quad (82)$$

где постоянную C_1 определяют из условия равенства нулю суммы моментов всех сил инерции относительно горизонтального шарнира. Для модели с дискретным распределением параметров это условие можно записать так:

$$\sum_i m_i y_i (r - r_0) = 0. \quad (83)$$

Очевидно, что условие (83) совпадает с условием ортогональности к форме колебаний лопасти как твердого тела, которую условно назовем формой колебаний нулевого тона. Если эту форму нормировать в соответствии с условием (83), то ее можно записать как

$$y_i^{(0)} = \frac{r - r_0}{R - r_0}. \quad (84)$$

Таким образом, при расчете шарнирно заделанной лопасти форму нулевого тона необходимо задать формулой (84), а при вычислении последующих тонов (начиная с первого) нужно выполнять условие ортогональности к нулевому тону.

Результат расчета собственных форм и частот колебаний шарнирно закрепленной лопасти методом последовательных приближений показан на рис. 56.

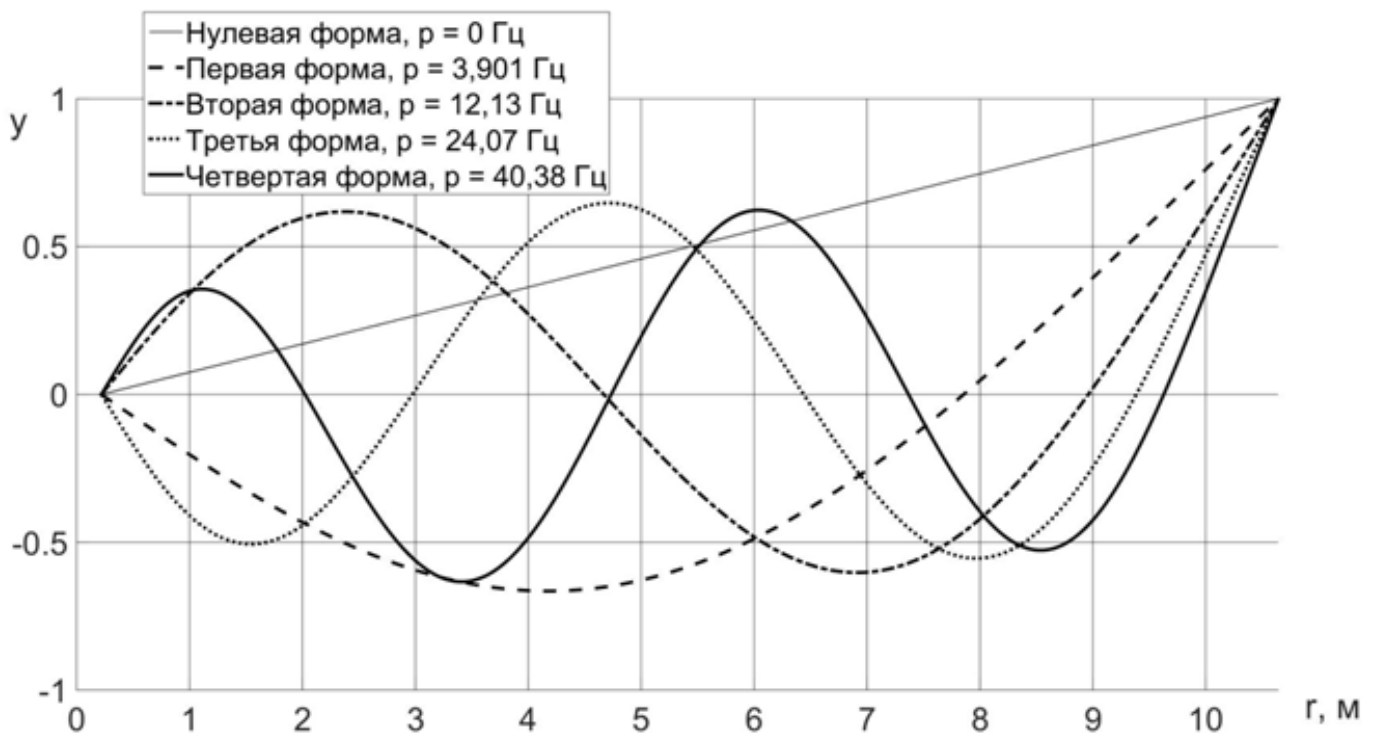


Рис. 56. Изгибные формы и частоты колебаний лопасти с шарнирной заделкой

Особенности расчета форм и частот собственных колебаний лопасти как свободной балки

В некоторых случаях необходимо вычислять частоты совместных колебаний лопасти и фюзеляжа вертолета. При этом втулка несущего винта, являющаяся точкой закрепления лопасти, может перемещаться вместе с фюзеляжем вертолета. Расчеты таких колебаний можно выполнить, если использовать модель лопасти, представляющую собой свободную балку. Тогда при определении совместных колебаний несущего винта и фюзеляжа достаточно вычислить приведенную к несущему винту массу фюзеляжа m_0 (см. рис. 54) и рассчитать частоты собственных колебаний лопасти.

Расчет лопасти как свободной балки может быть выполнен, если все формы собственных колебаний ортогональны к форме второго нулевого тона:

$$y_i^{(0)} = 1, \quad (85)$$

что равносильно выполнению условия равенства нулю суммы всех инерционных сил, действующих при колебаниях.

Сравнение расчетов с точным решением

Результаты, полученные при расчете собственных форм и частот колебаний невращающейся лопасти методом последовательных приближений, необходимо сопоставить с известным аналитическим решением для жестко и шарнирно закрепленной балки с равномерно распределенными параметрами. При этом для лопасти вместо реального распределения масс и жесткостей по размаху задаем средние равномерно распределенные значения данных параметров. Сравнение проводим для частот собственных колебаний.

Для балки с равномерно распределенными массой и жесткостью частоты определяют по формуле

$$p_j = \alpha_j^2 \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

где j – номер тона колебаний;

α_j – соответствующий коэффициент.

Для жестко заземленной балки

$$\alpha_j = \frac{\pi}{R} \left(j - \frac{1}{2} \right);$$

для шарнирно закрепленной

$$\alpha_j = \frac{\pi}{R} \left(j + \frac{1}{4} \right).$$

В таблице показаны частоты собственных колебаний лопасти с шарнирной и жесткой заделкой для первых четырех тонов упругих колебаний на основе точных соотношений и метода последовательных приближений.

Номер тона	Расчетный метод			
	Аналитический		Приближенный	
	Жесткая заделка	Шарнирная заделка	Жесткая заделка	Шарнирная заделка
1	13,09	81,83	18,43	80,77
2	117,80	265,15	115,51	261,74
3	327,34	553,2	323,42	546,10
4	641,59	946,0	633,77	933,86

3.4.5. Расчет форм и частот собственных колебаний лопасти в поле центробежных сил

Пределы применимости методов расчета, сводящихся к решению интегрального уравнения колебаний лопасти

Для расчета собственных колебаний лопасти в поле центробежных сил метод последовательных приближений, заключающийся в решении интегрального уравнения (55), применять не следует.

При четырехкратном интегрировании выражения (54) задача сводится к решению интегрального уравнения (55), которое можно записать в такой форме:

$$y = p^2 \int_0^r \int_0^r \frac{M_{инер}}{EI} dr^2; \quad M_{инер} = \int_r^R \int_r^R mydr^2, \quad (86)$$

где $M_{инер}$ – изгибающий момент от сил инерции, возникающих при колебаниях лопасти с частотой $p = 1$.

Аналогично при интегрировании (21) задача сводится к решению уравнения следующего вида:

$$y = p^2 \int_0^r \int_0^r \frac{(M_{инер} - \gamma M_{у.с})}{EI} dr^2, \quad (87)$$

где $M_{у.с}$ – изгибающий момент центробежных сил при угловой скорости вращения несущего винта $\omega = 1$, который находим из соотношения

$$M_{у.с} = \int_r^R myrdr - y \int_r^R mrdr; \quad (88)$$

γ – параметр, характеризующий отношение угловой скорости вращения несущего винта и частоты собственных колебаний лопасти в поле центробежных сил:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{p^2}. \quad (89)$$

Если метод последовательных приближений, используемый в уравнении (86), дает хорошую сходимость во всех случаях, относящихся к расчету винтов, то в применении к уравнению (87) он сходится лишь в некоторой области значений параметра γ .

В диапазоне рабочих чисел оборотов для лопастей вертолетов такой метод позволяет определить частоты собственных колебаний третьего и более высоких тонов только в том случае, если все тона колебаний вычислены для постоянного значения параметра γ , что соответствует условиям поставленной физической задачи лишь приближенно. Если в процессе последовательных приближений параметр γ уточнять под заданное значение угловой скорости ω , то метод будет сходиться только в диапазоне чисел оборотов, значительно меньших рабочих.

Это вызывает необходимость применения других методов, дающих возможность получить надежный результат во всем диапазоне чисел оборотов несущего винта.

Применение метода Галеркина для определения частот собственных колебаний лопасти

Метод Б. Г. Галеркина очень широко используют для решения различных задач об упругих колебаниях лопасти. Подставим в соотношение (21) функцию y в виде (53), тогда (черточку над y отбросим)

$$[EIy''']'' - [Ny']' - p^2 m y = 0. \quad (90)$$

Предположим, что формы собственных колебаний лопасти в поле центробежных сил не отличаются от соответствующих форм, подсчитанных для случая $N = 0$.

Считая, что формы колебаний $y^{(j)}$ известны, подставляем какую-либо одну форму $y^{(j)}$ в уравнение (90), умножаем все члены этого уравнения на эту же форму $y^{(j)}$ и интегрируем полученные выражения по длине лопасти:

$$\int_0^R [EI(y^j)''']'' y^j dr - \int_0^R [N(y^j)']' y^j dr - p^2 \int_0^R m(y^j)^2 dr = 0. \quad (91)$$

Преобразуем первые два слагаемых, интегрируя их по частям с учетом граничных условий

$$\begin{aligned}
\int_0^R \left[EI(y^j)'' \right] y^j dr &= \left[EI(y^j)'' \right] y^j \Big|_0^R - \int_0^R \left[EI(y^j)'' \right]' (y^j)' dr = \\
&= -EI(y^j)'' (y^j)' \Big|_0^R + \int_0^R EI \left[(y^j)'' \right]^2 dr = \int_0^R EI \left[(y^j)'' \right]^2 dr; \\
\int_0^R \left[N(y^j)' \right]' y^j dr &= N(y^j)' y^j \Big|_0^R - \int_0^R N \left[(y^j)' \right]^2 dr = - \int_0^R N \left[(y^j)' \right]^2 dr.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\int_0^R EI \left[(y^j)'' \right]^2 dr + \int_0^R N \left[(y^j)' \right]^2 dr - p^2 \int_0^R m (y^j)^2 dr = 0. \quad (92)$$

Входящие в это уравнение интегралы

$$C_{EI} = \int_0^R EI \left[(y^j)'' \right]^2 dr; \quad (93)$$

$$C_N = \int_0^R N \left[(y^j)' \right]^2 dr \quad (94)$$

имеют вполне определенный физический смысл, а именно:

C_{EI} – потенциальная энергия, накапливаемая лопастью, когда в процессе изгибных колебаний по форме j -го тона она достигает крайних отклонений от положения равновесия;

C_N – потенциальная энергия, накопленная лопастью при ее изгибе в поле центробежных сил. Здесь, как и в выражении (93), могут быть рассмотрены разные тона различных колебаний.

Полную потенциальную энергию, накопленную лопастью при ее изгибе в поле центробежных сил по формуле $y^{(j)}$, можно записать как

$$C_{\Sigma} = C_{EI} + C_N. \quad (95)$$

При изгибных колебаниях, когда лопасть проходит через положение равновесия, скорости перемещения ее точек достигают наибольших величин:

$$\dot{y}^{(j)} = p y^{(j)}. \quad (96)$$

При этом кинетическая энергия лопасти может быть определена по формуле

$$K_f = p^2 \int_0^R m \left[y^{(j)} \right]^2 dr. \quad (97)$$

В процессе свободных колебаний потенциальная энергия, накопленная лопастью при ее изгибе по форме $y^{(j)}$, превращается в кинетическую, когда

лопасть проходит положение равновесия. Равенство амплитудных значений потенциальной и кинетической энергий лопасти выражает формула (92).

Если уравнение (92) разделить на интеграл при p^2 , то получим выражение для частоты j -го тона собственных колебаний лопасти в поле центробежных сил:

$$p_j^2 = p_{0j}^2 + k_j \omega^2, \quad (98)$$

где p_{0j} – частота собственных колебаний лопасти без учета центробежных сил;

k_j – коэффициент, учитывающий влияние центробежных сил.

Эти величины определяют по следующим соотношениям:

$$p_{0j}^2 = \frac{\int_0^R EI \left[(y^j)'' \right]^2 dr}{\int_0^R m \left[y^j \right]^2 dr}; \quad (99)$$

$$k_j = \frac{\int_0^R N_{\omega=1} \left[(y^j)' \right]^2 dr}{\int_0^R m \left[y^j \right]^2 dr}, \quad (100)$$

где $N_{\omega=1}$ – центробежная сила в сечении лопасти при частоте вращения несущего винта $\omega = 1$.

Полученные выражения для частот собственных колебаний лопасти в поле центробежных сил – приближенные. Однако расчеты показывают, что в некоторых случаях эти выражения дают вполне удовлетворительную для практических целей точность.

Метод конечных элементов (трех моментов) для расчета форм и частот собственных колебаний

Метод трех моментов, примененный к расчету растянутой центробежными силами лопасти, имеет значительные преимущества. Среди них главным является то, что он не требует высокой точности в процессе вычисления.

Для вывода расчетных формул используем балочную модель лопасти с сосредоточенными грузами, которую использовали ранее (рис. 57).

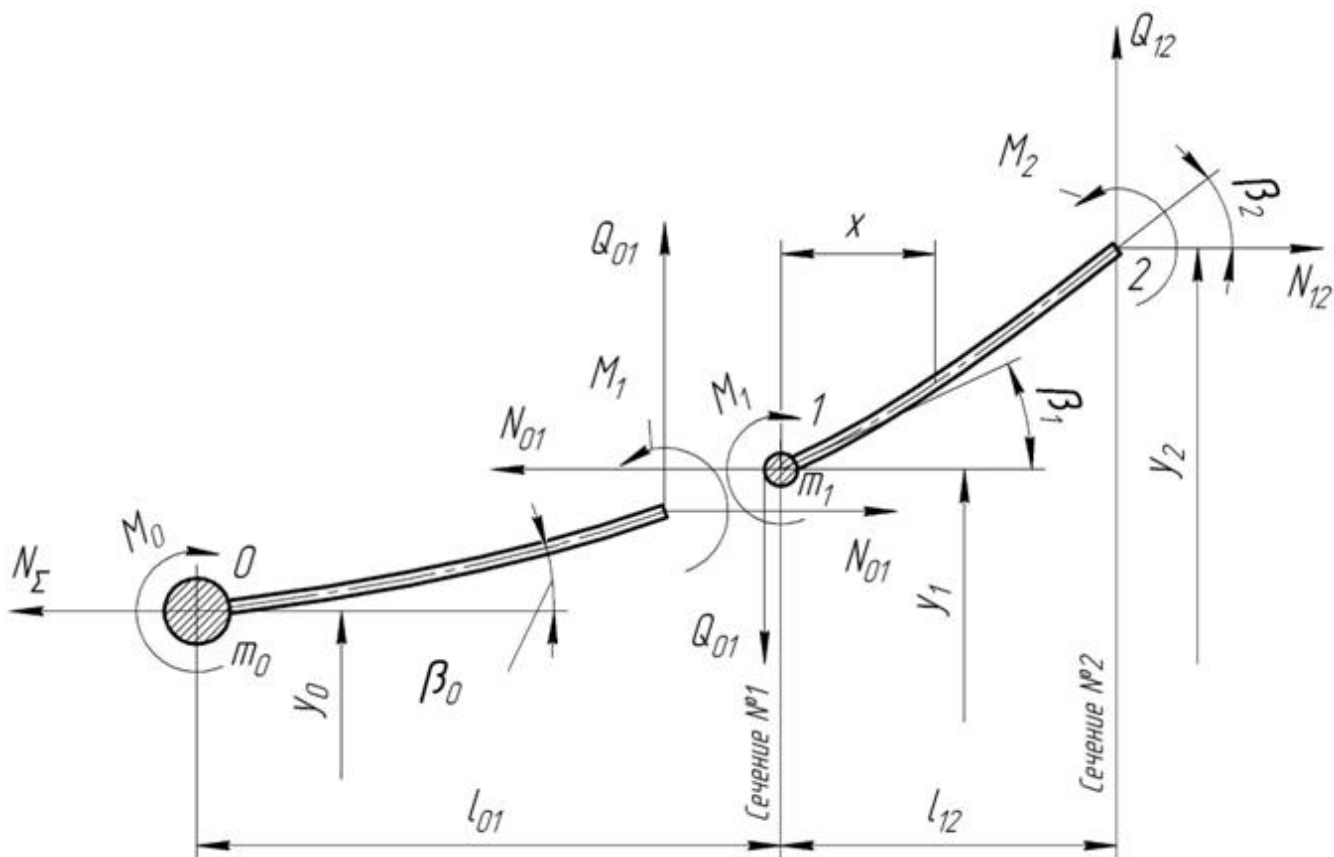


Рис. 57. Схема сил, действующих на два смежных элемента лопасти

Представим изгибную жесткость лопасти в виде ступенчатой кривой таким образом, чтобы она оставалась постоянной на протяжении каждого участка (см. рис. 57). Центробежную силу считаем приложенной только к грузам. Поэтому на протяжении каждого участка величина ее не изменяется. Считаем, что центробежная сила воспринимается специальным креплением нулевого груза, который может свободно перемещаться по вертикали.

Очевидно, что такую идеализированную расчетную схему можно использовать в случае, если число участков достаточно велико. Обычно лопасть разбивают не менее чем на 25 – 30 участков.

Предлагаемая в дальнейшем методика заключается в определении частот и форм собственных колебаний идеализированной схемы без каких-либо дополнительных допущений.

Проанализируем два соседних участка лопасти, отклонившихся под действием инерционных сил от плоскости вращения винта. Рассмотрим только малые отклонения.

Уравнения равновесия каждого из участков под действием внешних по отношению к данному участку сил можно записать в виде равенства нулю суммы моментов всех этих сил относительно какой-либо точки. При этом в сумму

моментов сил следует включить и действующие в сечении перерезывающую силу Q и изгибающий момент M .

Тогда сумму моментов сил, действующих на участок лопасти 0–1 относительно точки 0, запишем как

$$M_1 - M_0 - N_{01}(y_1 - y_0) + Q_{01}l_{01} = 0. \quad (101)$$

Сумма моментов сил, действующих на участках 1–2 относительно точки 1:

$$M_2 - M_1 - N_{12}(y_2 - y_1) + Q_{12}l_{12} = 0, \quad (102)$$

где

$$Q_{01} = -\sum_1^z m_i \ddot{y}_i; \quad N_{01} = \sum_1^z \omega^2 r_i m_i;$$

$$Q_{12} = -\sum_2^z m_i \ddot{y}_i; \quad N_{12} = \sum_2^z \omega^2 r_i m_i.$$

Разделив уравнения (101) и (102) на $l_{01}N_{01}$ и $l_{12}N_{12}$ и сложив их, получим уравнение равновесия

$$b_0 y_0 + a_1 y_1 + b_1 y_2 = m_0 M_0 + n_1 M_1 + m_1 M_2 + \frac{Q_{12}}{N_{12}} - \frac{Q_{01}}{N_{01}}. \quad (103)$$

Введенные новые обозначения для коэффициентов в соотношениях (103), (107) – (111) приведены ниже (см. выражения (114) – (123)).

Аналогично уравнению (103) можно записать условия равновесия для всех других участков лопасти.

Рассматривая только малые перемещения элементов лопасти, определяем деформацию участка 1–2

$$[EI_{12}y'''] - [N_{12}y'] = 0.$$

Момент от сил инерции отсутствует, так как эти силы приложены только на границах участка. Учитывая, что на длине участка $EI = const$ и $N = const$, а также, что $EIy'' = M$, получаем

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \mu_1^2 M = 0, \quad (104)$$

где

$$\mu_1^2 = \frac{N_{12}}{EI_{12}}.$$

Решение уравнения (104) можно записать через гиперболические функции

$$M_x = Ash\mu_1 x + Bch\mu_1 x. \quad (105)$$

Коэффициенты A и B находим из граничных условий:

– при $x = 0$ $M_x = M_1$;

– при $x = l_{12}$ $M_x = M_2$,

откуда

$$A = \frac{M_2}{sh\alpha_1} - \frac{M_1}{th\alpha_1};$$

$$B = M_1,$$

где $\alpha_1 = \mu_1 l_{12}$.

Подставим эти значения в (105):

$$M_x = EI_{12}y'' = \left[\frac{M_2}{sh\alpha_1} - \frac{M_1}{th\alpha_1} \right] sh\mu_1 x + M_1 ch\mu_1 x. \quad (106)$$

Проинтегрируем дважды уравнение (106). Полагая, что при $x = 0$ $y' = \beta_1$, $y = y_1$, а при $x = l_{12}$ $y' = \beta_2$, $y = y_2$, получаем либо

$$b_1(y_2 - y_1) = d_1 M_2 + e_1 M_1 + \beta_1, \quad (107)$$

либо

$$b_1(y_2 - y_1) = -e_1 M_2 - d_1 M_1 + \beta_2. \quad (108)$$

Уравнение деформаций для участка 0–1 можно записать аналогично выражению (108):

$$b_0(y_1 - y_0) = -e_0 M_1 - d_0 M_0 + \beta_1. \quad (109)$$

Изменив в соотношении (109) все знаки на обратные и сложив с уравнением (107), получим

$$b_0 y_0 + a_1 y_1 + b_1 y_2 = d_0 M_0 + c_1 M_1 + d_1 M_2. \quad (110)$$

Подставим в уравнение равновесия элементов (103) левую часть, выраженную через изгибающие моменты (110):

$$h_0 M_0 + g_1 M_1 + h_1 M_2 = \frac{Q_{12}}{N_{12}} - \frac{Q_{01}}{N_{01}}. \quad (111)$$

Повторив проделанные выкладки для других частей лопасти, запишем систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени y_i и M_i :

$$\begin{pmatrix} 1 & g_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_0 & g_1 & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & g_2 & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{z-3} & g_{z-2} & h_{z-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_{z-2} & g_{z-1} & h_{z-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_{z-1} & g_z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ M_0 \\ M_1 \\ \dots \\ M_{z-1} \\ M_z \\ \beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{z-2} \\ F_{z-1} \\ F_z \end{pmatrix}; \quad (112)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_0 & d_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{z-3} & c_{z-2} & d_{z-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_{z-2} & c_{z-1} & d_{z-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_{z-1} & c_z & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ M_0 \\ M_1 \\ \dots \\ M_{z-1} \\ M_z \\ \beta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & a_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{z-3} & a_{z-2} & b_{z-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{z-2} & a_{z-1} & b_{z-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{z-1} & a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{z-2} \\ y_{z-1} \\ y_z \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Эта система, записанная в матричной форме, состоит из двух семейств (112) и (113), каждое из которых включает в себя $z+1$ уравнение.

Все коэффициенты в (112) и (113) определяют по формулам (114), (117) – (123).

В описанную систему уравнений включены также соотношения (4.22) и (4.23), необходимые для учёта граничных условий задачи. Они относятся только к комлевому и концевому участкам и содержат краевые значения β_0 и β_z .

Выше приняты следующие обозначения:

$$b_0 = \frac{1}{l_{01}}; \quad a_0 = -b_0;$$

$$b_i = \frac{1}{l_{i,i+1}}; \quad a_i = -b_{i-1} - b_i; \quad (114)$$

$$b_z = 0; \quad a_z = -b_{z-1};$$

$$m_0 = \frac{1}{l_{01}N_{01}}; \quad n_0 = -m_0;$$

$$m_i = \frac{1}{l_{i,i+1}N_{i,i+1}}; \quad n_i = -m_{i-1} - m_i; \quad (115)$$

$$m_z = 0; \quad n_z = -m_{z-1};$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{N_{01}l_{01}^2}{EI_{01}}};$$

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{N_{i,i+1}l_{i,i+1}^2}{EI_{i,i+1}}}; \quad (116)$$

$$\alpha_z = 0;$$

$$\begin{aligned}
d_0 &= m_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{sh \alpha_0} \right); \\
d_i &= m_i \left(1 - \frac{\alpha_i}{sh \alpha_i} \right); \\
d_z &= 0;
\end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned}
e_0 &= m_0 \left(\frac{\alpha_0}{th \alpha_0} - 1 \right); \\
e_i &= m_i \left(\frac{\alpha_i}{th \alpha_i} - 1 \right); \\
e_z &= 0;
\end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= e_0; \\
c_i &= e_{i-1} + e_i; \\
c_z &= e_{z-1};
\end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned}
h_0 &= d_0 - m_0; \\
h_i &= d_i - m_i; \\
h_z &= 0;
\end{aligned} \tag{120}$$

$$\begin{aligned}
g_0 &= c_0 - n_0; \\
g_i &= c_i - n_i; \\
g_z &= c_z - n_z.
\end{aligned} \tag{121}$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{Q_{01}}{N_{01}}; \\
F_i &= \frac{Q_{i,i+1}}{N_{i,i+1}} - \frac{Q_{i-1,i}}{N_{i-1,i}}; \\
F_z &= -\frac{Q_{z-1,z}}{N_{z-1,z}};
\end{aligned} \tag{122}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i,i+1} &= -\sum_{k=i+1}^z m_k \ddot{y}_k; \\
N_{i,i+1} &= \sum_{k=i+1}^z \omega^2 r_k m_k.
\end{aligned} \tag{123}$$

В выражении (123) сомножитель m_k означает массу k -го груза.

Систему уравнений (112) и (113) удобно решать с помощью метода последовательных приближений.

Представим входящие в систему функции, зависящие от времени $y_i(t)$, $M_i(t)$ и $\beta_i(t)$, в таком виде:

$$\begin{aligned}y_i(t) &= y_i \sin(pt); \\M_i(t) &= M_i \sin(pt); \\ \beta_i(t) &= \beta_i \sin(pt),\end{aligned}$$

где через y_i , M_i и β_i обозначены амплитудные значения этих функций.

Тогда, имея в виду, что

$$\ddot{y}_i(t) = -p^2 y_i \sin(pt),$$

и сокращая на $\sin(pt)$, получаем систему алгебраических уравнений, аналогичную системе (112) и (113). Только в правых частях семейства уравнений, аналогичных (112), появятся значения p^2 .

В качестве нулевого приближения зададимся некоторой функцией y_{i_0} . Вторым индексом снизу обозначен номер приближения. Взятая в качестве нулевого приближения функция y_{i_0} должна быть нормирована, например

$$y_z = 1. \quad (124)$$

Если функция y_i известна, то с точностью до постоянного множителя p^2 определяем входящие в правую часть уравнений (112) силы инерции.

Положим временно $p^2 = 1$. Тогда из соотношений (112) можно найти значения изгибающих моментов M_i и угол поворота лопасти в комле β_0 .

Заметим, что для нахождения M_i и β_0 из уравнений (112) следует учитывать граничные условия закрепления лопасти:

- при жестком закреплении комля лопасти $\beta_0 = 0$, $M_z = 0$;
- при шарнирном закреплении комля лопасти $M_0 = 0$, $M_z = 0$;
- при рассмотрении лопасти как свободной балки $M_0 = 0$, $M_z = 0$.

Таким образом, количество неизвестных в системе уравнений (112) всегда равно количеству уравнений.

По известным значениям M_i и β_0 из уравнений (113) определяем деформацию

$$y_i = p^2 u_i, \quad (125)$$

где u_i – упругая деформация оси лопасти для случая $p^2 = 1$.

Чтобы вычислить значения u_i , используем матричное уравнение (113), где вместо строки, содержащей β_z , запишем дополнительное условие

$$u_0 = 0,$$

если в комле лопасти имеется опора, либо

$$\sum_{i=0}^z m_i u_i = 0,$$

если лопасть рассматривается как свободная балка.

После определения перемещений u_i находим частоту собственных колебаний p . Её величину получаем на основании выражений (124) и (125) следующим образом:

$$p^2 = \frac{y_z}{u_z} = \frac{1}{u_z}. \quad (126)$$

После этого в соответствии с выражением (125) вычисляем и уточняем после первого приближения функцию

$$y_i = p^2 u_i. \quad (127)$$

Затем весь процесс повторяем до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность. Условие для окончания расчета аналогично (74).

Метод последовательных приближений приводит к тому, что форма y_i сходится к форме нижнего тона собственных колебаний лопасти.

При нахождении последующих тонов должно быть соблюдено условие ортогональности. Операции, вытекающие из соблюдения условия ортогональности, остаются теми же, что и для лопасти невращающегося винта.

Расчет собственных форм и частот колебаний выполнен для случаев жесткого и шарнирного закреплений лопасти (см. подразд. 3.7.3 и 3.7.4).

Результаты расчета на основе метода трех моментов для вращающейся лопасти и разных закреплений показаны на рис. 58, 59.

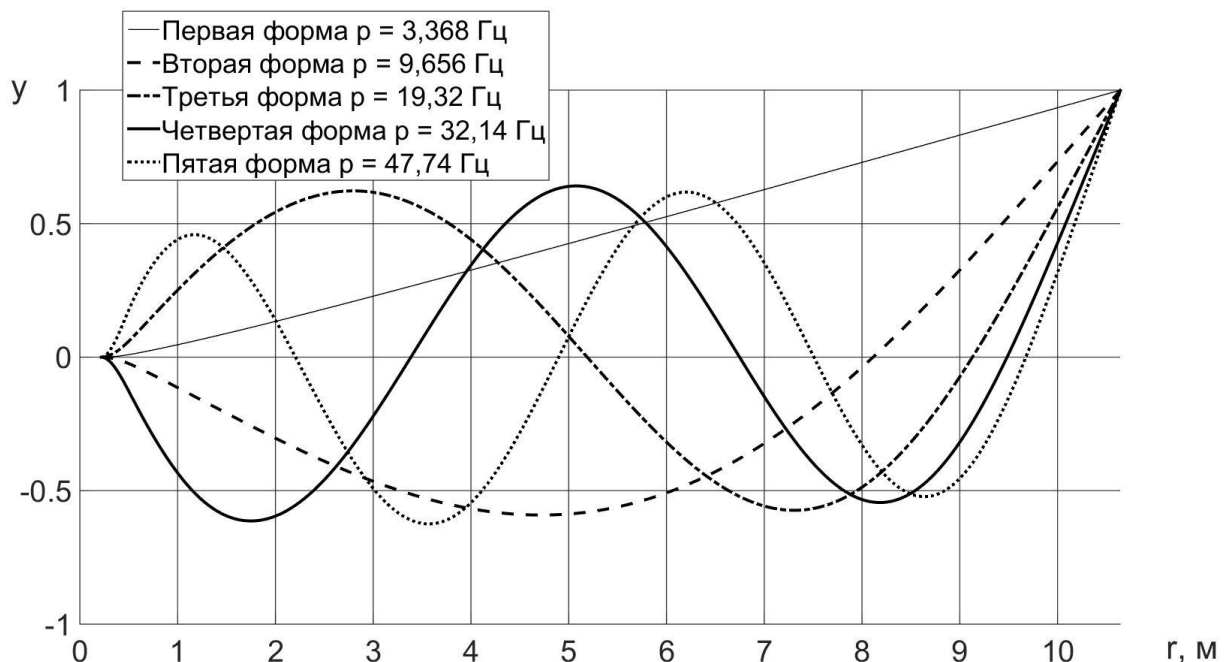


Рис. 58. Частоты и формы собственных колебаний вращающейся лопасти с упругим элементом в комле

Частоты колебаний, полученные методом Бубнова – Галеркина для лопасти с упругим элементом в комле:

$$p_1 = 3,340; \quad p_2 = 9,171; \quad p_3 = 18,76; \quad p_4 = 32,51; \quad p_5 = 49,17,$$

а для шарнирно закрепленной лопасти

$$p_0 = 2,931; \quad p_1 = 8,350; \quad p_2 = 17,44; \quad p_3 = 30,47; \quad p_4 = 47,02.$$

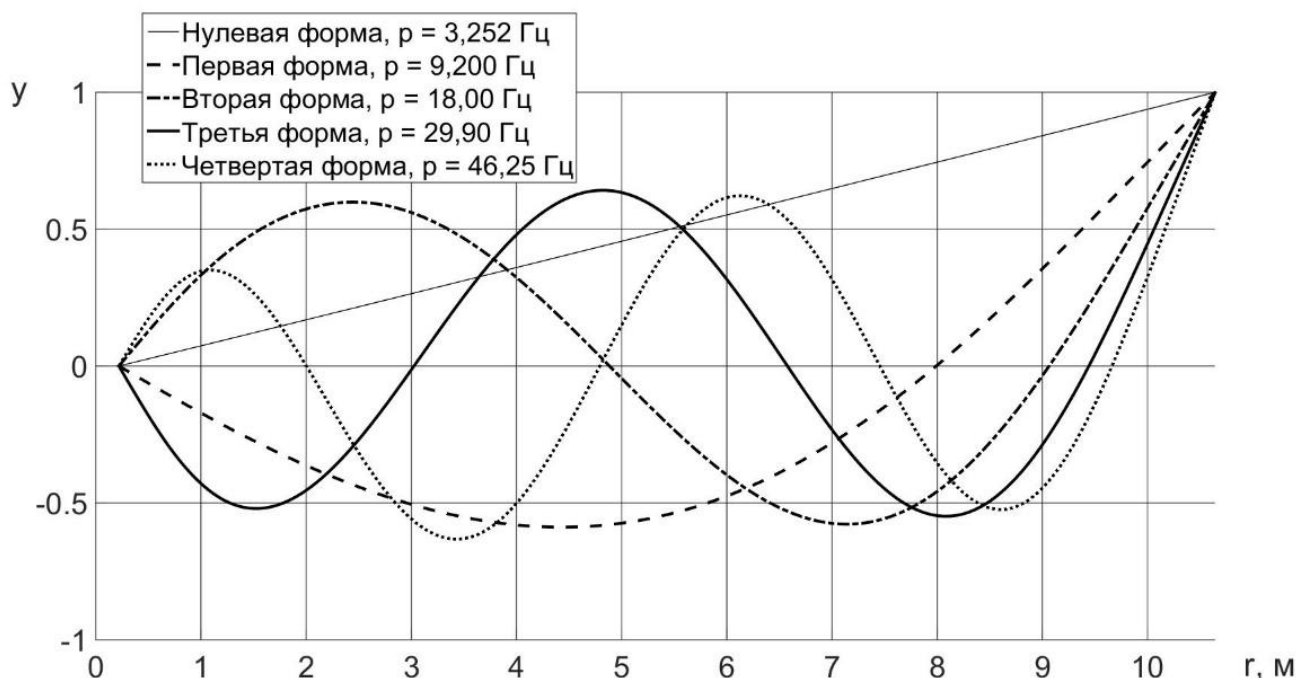


Рис. 59. Частоты и формы собственных колебаний шарнирно закрепленной вращающейся лопасти

Значения частот, полученных разными методами, имеют большое расхождение – до 20 %. Поэтому использовать метод Бубнова – Галеркина в этой задаче не рекомендуется.

Приведенные выше уравнения в равной степени пригодны для расчёта частот собственных колебаний как в плоскости взмаха, так и в плоскости вращения винта. При колебаниях лопасти в плоскости вращения расчетные значения частот $p_{расч.пл.вращ}$ следует уточнить по формуле

$$P_{пл.вращ}^2 = p_{расч.пл.вращ}^2 - \omega^2, \quad (128)$$

где ω – угловая скорость вращения винта.

3.5. Крутильные колебания лопасти

3.5.1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний лопасти

Расчет форм и частот собственных изгибных колебаний лопасти, рассмотренный выше, необходим при выборе параметров лопасти, исключая возможность изгибных резонансов. Особенность аэродинамической нагрузки

такова, что она способна вызвать значительные амплитуды колебаний при таком резонансе.

На практике значительные крутильные колебания возникают при флаттере или при вынужденных колебаниях в условиях близости флаттера. Учет упругого закручивания лопасти НВ необходим для более точного определения аэродинамической нагрузки.

Представим лопасть в виде консольного прямолинейного стержня с переменной по длине жесткостью на кручение $GI_{кр}$. Массовый момент инерции сечений стержня относительно его оси I_m будем считать так же, как и жесткость на кручение, непрерывной функцией, переменной по длине стержня, центры тяжести всех сечений стержня – лежащими на его оси, заделку стержня – упругой на кручение.

Поясним, с чем связана относительно низкая жесткость заделки стержня. На рис. 4 показан поводок, к нему крепится тяга системы управления углом установки лопасти. Участок проводки управления от поводка до рулевого привода (комбинированного агрегата управления – КАУ) называется забустерной частью системы управления вертолетом. Он включает в себя тяги, качалки управления, автомат перекоса. Большое количество подвижных элементов в забустерной части, наличие подшипников и зазоров в сочленениях приводит к большим деформациям проводки от шарнирных моментов лопасти.

Сведение задачи о колебаниях лопасти к расчету такой модели предполагает применение некоторых допущений. Будем считать, что ось жесткости лопасти прямолинейна и совпадает с осью осевого шарнира втулки несущего винта (см. рис. 4). Принимаем, что компенсатор взмаха σ_k равен нулю.

Данные допущения позволяют решить задачу о крутильных колебаниях лопасти независимо, без учета связи с ее изгибными колебаниями.

Составим дифференциальное уравнение крутильных колебаний лопасти. Крутящий момент в сечении лопасти можно определить из дифференциального уравнения

$$\frac{dM_{кр}}{dr} = -\mu, \quad (129)$$

где μ – погонный крутящий момент внешних сил и сил инерции, действующих на элемент лопасти.

Под действием крутящего момента каждый элемент лопасти закручивается на угол

$$d\varphi = \frac{M_{кр}}{GI_{кр}} dr, \quad (130)$$

где φ – упругий угол поворота сечения лопасти.

Выразим значение крутящего момента из выражения (130) и подставим в (129). Тогда дифференциальное уравнение крутильных деформаций лопасти запишем в форме

$$\frac{d(GI_{кр} \frac{d\varphi}{dr})}{dr} + \mu = 0$$

или, используя обозначения $\frac{d\varphi}{dr} = \varphi'$ и $\frac{dM_{кр}}{dr} = M'_{кр}$,

$$[GI_{кр}\varphi']' + \mu = 0. \quad (131)$$

Определим погонный крутящий момент внешних сил и сил инерции, действующих на элемент лопасти.

На рис. 60 показаны вид лопасти в плане и ее сечение. Ось Oz системы координат $Oxyz$ совпадает с осью жесткости лопасти, ось Oy параллельна оси вращения несущего винта; ось Oz' системы координат $Ox'y'z'$ также совпадает с осью жесткости лопасти, а ось Oy' – с главной центральной осью сечения лопасти. Для перехода из одной системы координат в другую используем геометрические соотношения

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi;$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.$$

Углы закручивания лопасти малы, поэтому, ограничиваясь величинами первого порядка малости, получаем

$$x = x' - y'\varphi;$$

$$y = x'\varphi + y'. \quad (132)$$

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади dF , расположенный в поперечном сечении r . В системе координат $Oxyz$ этот элемент имеет координаты (x, y, r) . Как видно, центробежная сила $\vec{F}_{цб}$ создает крутящий момент вокруг оси Oz :

$$dM = \omega^2 xy \rho dF,$$

где ω – угловая скорость вращения несущего винта;

ρ – плотность материала, из которого выполнено сечение.

В системе координат $Ox'y'z'$ крутящий момент

$$dM = \omega^2 (x' - y'\varphi)(x'\varphi + y') \rho dF = \omega^2 [(x')^2 \varphi + x'y' - (y')^2 \varphi] \rho dF.$$

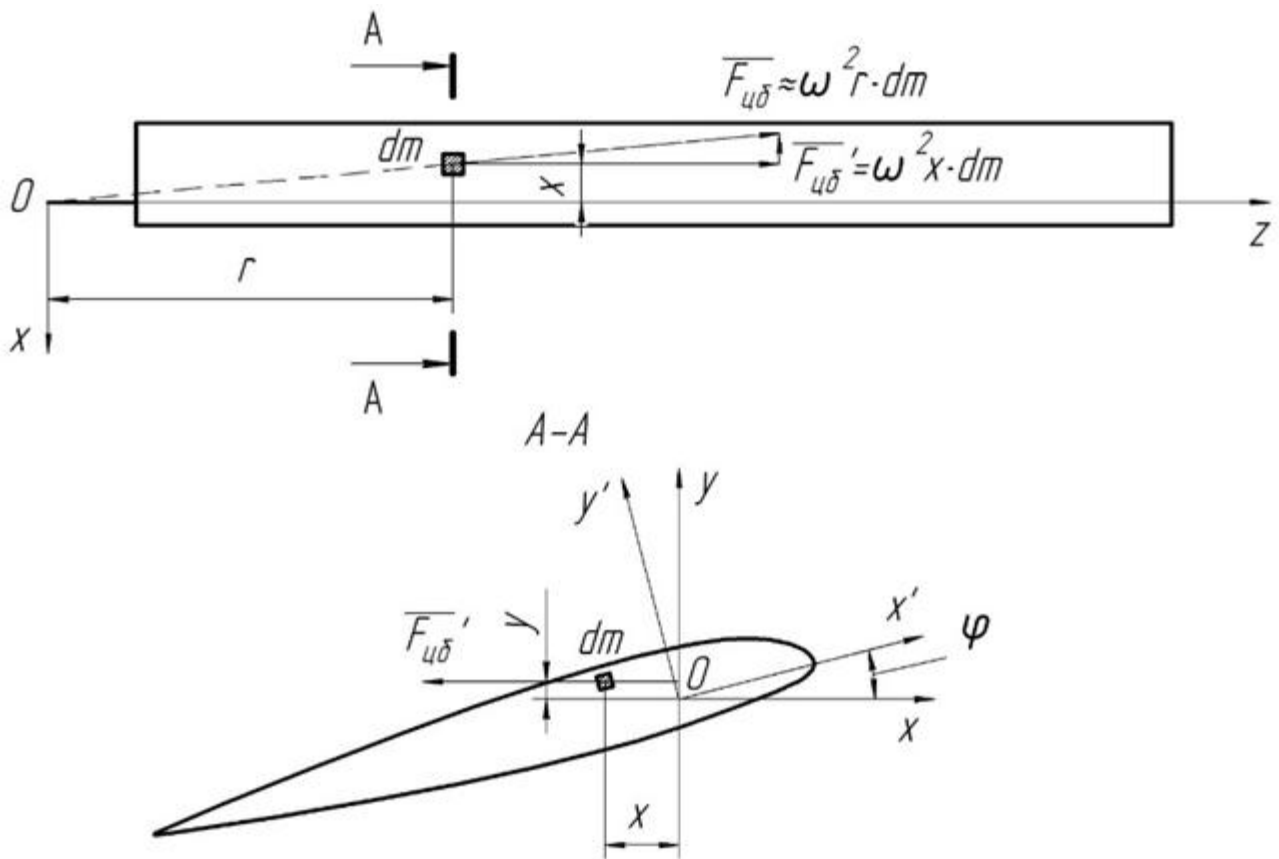


Рис. 60. Центробежная сила, действующая на бесконечно малый элемент лопасти

Находим величину момента, действующего на все сечение, путем интегрирования элементарных моментов по площади сечения:

$$M = \omega^2 \rho \int_F [(x')^2 \phi + x'y' - (y')^2 \phi] dF = \omega^2 [I_y \phi - I_x \phi],$$

где I_x, I_y – погонные массовые главные моменты инерции лопасти.

Кроме того, на лопасть также действует погонный момент от сил инерции $I_m \ddot{\phi}$. Тогда окончательно погонный крутящий момент внешних сил и сил инерции, действующих на элемент лопасти, определяем по формуле

$$\mu = -I_m \ddot{\phi} - \omega^2 (I_y - I_x) \phi. \quad (133)$$

Если протяженность профиля вдоль оси x значительно больше, чем вдоль оси y , что обычно так и происходит, то можно сделать такое допущение:

$$I_y - I_x \cong I_m, \quad (134)$$

где I_m – погонный массовый момент инерции сечения лопасти относительно оси, проходящей через ось жесткости.

Подставив выражение (133) с учетом (134) в уравнение (131), получим дифференциальное уравнение крутильных колебаний лопасти, вращающейся в поле центробежных сил:

$$\left[GI_{кр}\varphi'\right]' - I_m(\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi) = 0. \quad (135)$$

Рассматриваемая модель лопасти имеет следующие граничные условия:

– при $r = 0$

$$\left[GI_{кр}\varphi'\right] = c_{упр}\varphi_0; \quad (136)$$

– при $r = R$

$$\left[GI_{кр}\varphi'\right] = 0, \quad (137)$$

где $c_{упр}$ – жесткость системы управления несущим винтом, приведенная к осевому шарниру втулки (жесткость управления определяет величину жесткости упругой заделки лопасти в комле);

φ_0 – поворот лопасти в осевом шарнире вследствие деформаций системы управления несущим винтом.

3.5.2. Определение форм и частот собственных колебаний лопасти на кручение

Для решения поставленной задачи применим способ, аналогичный изложенному ранее для определения форм и частот изгибных колебаний. Предположим, что свободные крутильные колебания гармонические:

$$\varphi(t) = \varphi \sin(\nu t). \quad (138)$$

Подставив выражение (138) в уравнение (135), получим

$$\left[GI_{кр}\varphi'\right]' + I_m\varphi(\nu^2 - \omega^2) = 0. \quad (139)$$

Из уравнения (139) следует, что формы собственных колебаний вращающейся и невращающейся лопастей на кручение одинаковы, а частоты связаны соотношением

$$\nu^2 = \nu_0^2 + \omega^2, \quad (140)$$

где ν – частота собственных колебаний в поле центробежных сил;

ν_0 – частота собственных колебаний лопасти невращающегося винта.

Проинтегрируем выражение (139) с учетом граничных условий (136) и (137). В результате

$$\varphi = \nu^2 \left[\int_0^r \frac{dr}{GI_{кр}} \int_r^R I_m \varphi dr + \frac{1}{c_{упр}} \int_0^R I_m \varphi dr \right]. \quad (141)$$

Здесь и дальше индекс при ν , означающий, что частота собственных колебаний определяется для случая $\omega = 0$, опущен.

Уравнение (141) решаем методом последовательных приближений аналогично (55) для изгибных колебаний.

Задаемся произвольной формой колебаний φ , которая должна быть нормирована, например

$$\varphi_R = 1, \quad (142)$$

где φ_R – упругий угол закручивания конца лопасти.

Тогда, выполнив операции, задаваемые формулой (141), найдем функцию

$$\mathcal{G} = \int_0^r \frac{dr}{GI_{кр\ r}} \int_0^R I_m \varphi dr + \frac{1}{c_{упр}} \int_0^R I_m \varphi dr. \quad (143)$$

Частоту собственных колебаний лопасти на кручение можно вычислить из условия нормирования (142)

$$\nu^2 = \frac{1}{\mathcal{G}_R}, \quad (144)$$

где \mathcal{G}_R – значение функции \mathcal{G} на конце лопасти.

Задавшись новым значением функции

$$\varphi = \nu^2 \mathcal{G} \quad ..(145)$$

и проделав операции (143) и (144) столько раз, сколько потребуется для обеспечения потребной точности, получим окончательные значения ν и φ .

Как и при вычислении форм и частот собственных изгибных колебаний, метод последовательных приближений приводит к определению низшего тона собственных колебаний кручения. При нахождении последующих тонов необходимо выполнить условие ортогональности, аналогичное условию (78):

$$\int_0^R I_m \varphi^{(j)} \varphi^{(m)} dr = 0. \quad (146)$$

Здесь индексом j отмечена форма искомого тона колебаний, а индексом m – формы уже определенных низших тонов.

Полагая

$$\varphi^{(j)} = \nu^2 \left[\mathcal{G} - \sum_{m=1}^{m=j-1} C_m \varphi^{(m)} \right], \quad (147)$$

получаем из условия (146) выражения для постоянных коэффициентов

$$C_m = \frac{\int_0^R I_m \mathcal{G} \varphi^{(m)} dr}{\int_0^R I_m [\varphi^{(m)}]^2 dr}. \quad (148)$$

Частоты собственных колебаний последующих тонов определяем при каждом приближении таким образом:

$$v_j^2 = \frac{1}{g_R - \sum_{m=1}^{m=j-1} C_m}. \quad (149)$$

Частоты собственных колебаний необходимо скорректировать по формуле (140), учитывающей влияние центробежных сил.

Расчеты форм и частот собственных колебаний лопасти на кручение для реальных вертолетов показывают, что решающее значение при определении величин частот низшего тона колебаний имеет жесткость системы управления несущим винтом. Почти всегда жесткость лопасти на кручение намного выше жесткости системы управления.

Эта особенность в соотношении жесткостей лопасти и управления позволяет в некоторых расчетах применять допущение о том, что крутильные деформации лопасти малы по сравнению с деформациями управления, и вводить в расчеты только закрутку лопасти вследствие деформации проводки управления.

Однако данные выводы относятся к крутильным колебаниям лопасти, рассматриваемой изолированно без учета связей, которые накладывает на колебания конструкция закрепления лопасти на втулке. Связь между крутильными колебаниями отдельных лопастей несущего винта через систему управления может существенно изменить всю картину колебаний.

Результаты расчета собственных форм и частот крутильных колебаний для вращающейся лопасти показаны на рис. 61 – 64.

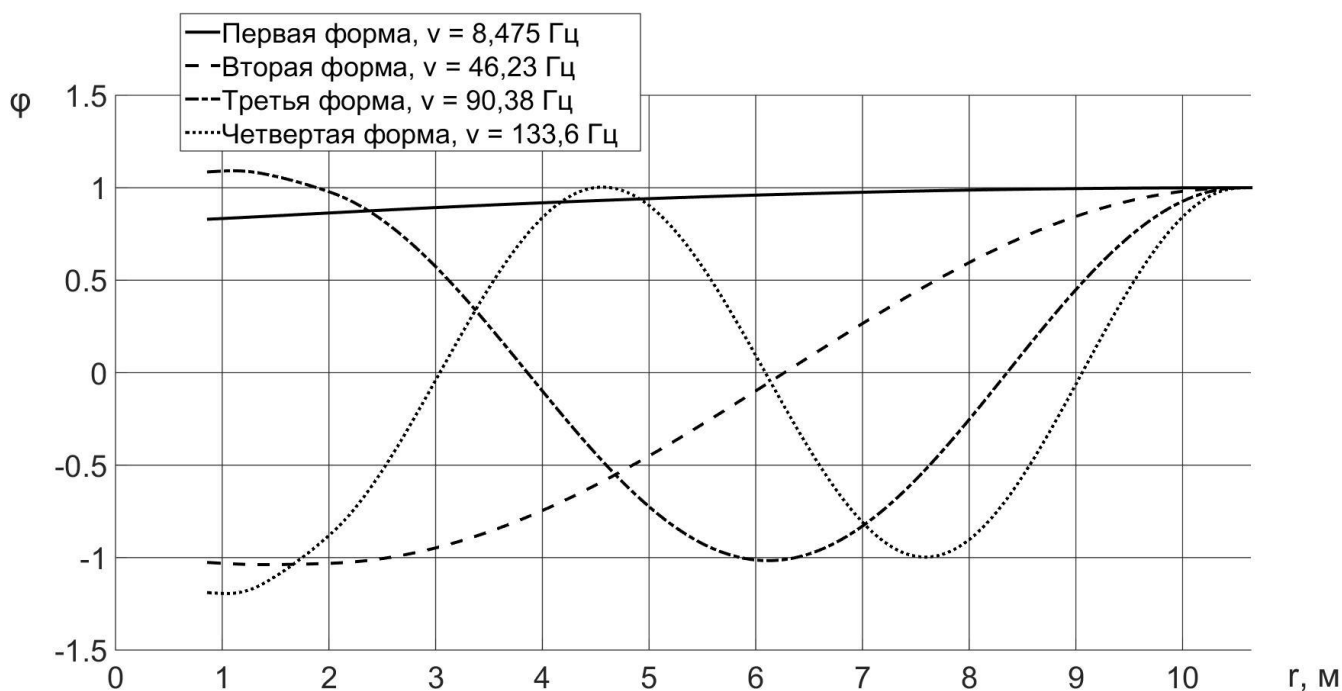


Рис. 61. Частоты и формы крутильных колебаний лопасти

Форма кручения по первому тону указывает на то, что основной вклад в кручение вносит податливость забустерной части проводки управления

вертолетом. На рис. 61, 62 видно, что закручивание самой лопасти практически отсутствует.

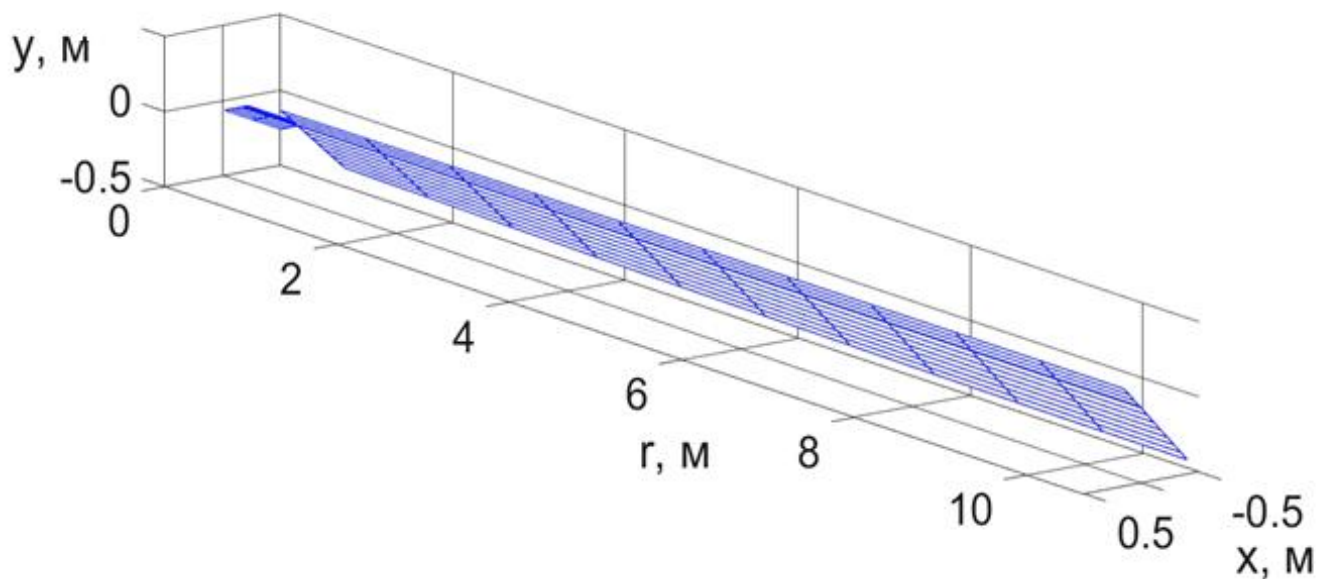


Рис. 62. Первая форма крутильных колебаний лопасти

Для вторых и третьих тонов упругих колебаний характерны закручивание самой лопасти и деформация проводки управления вертолетом.

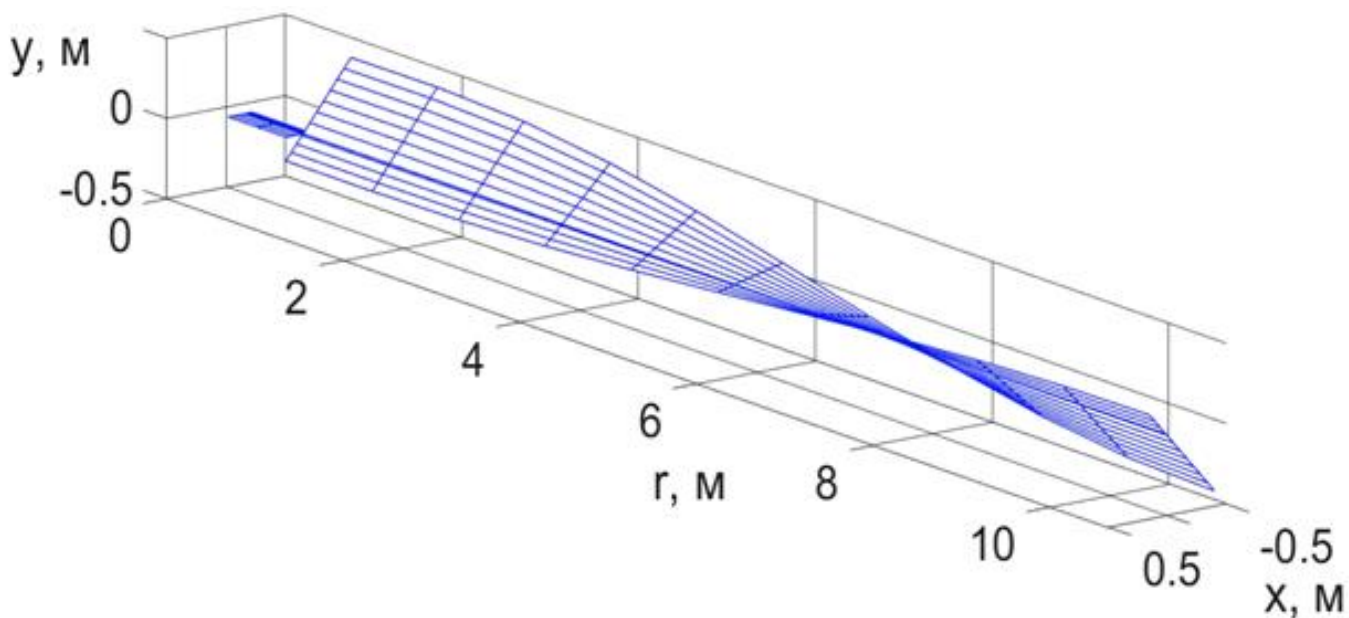


Рис. 63. Вторая форма крутильных колебаний лопасти

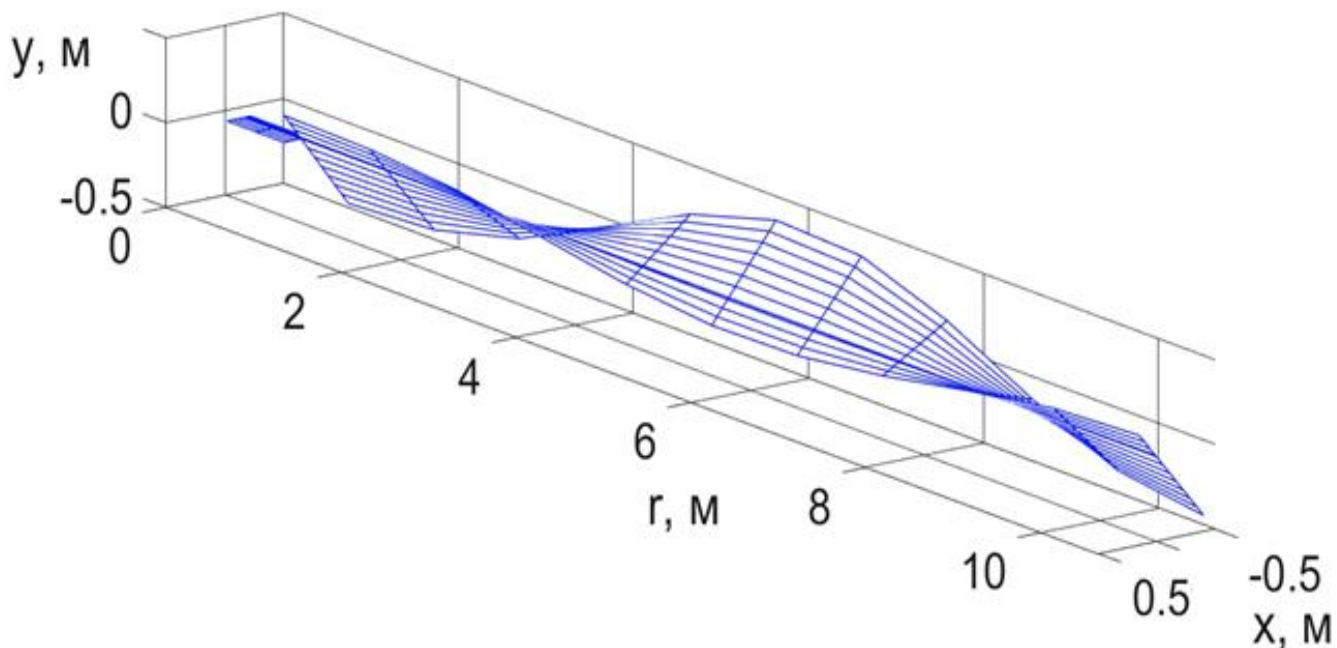


Рис. 64. Третья форма крутильных колебаний лопасти

Как видно из рис. 61 – 64, местные улы атаки сечений лопасти в потоке воздуха изменяются из-за ее закручивания вдоль радиуса, поэтому следует ожидать большой отклик конструкции по удерживаемым формам в том случае, если распределенная аэродинамическая нагрузка на возможных перемещениях системы совершает большую положительную работу за цикл колебаний.

3.6. Совместные изгибно-крутильные колебания лопасти

3.6.1. Связь между изгибными и крутильными колебаниями

Расчет частот и форм собственных изгибно-крутильных колебаний необходим в процессе проектирования НВ и при решении конкретных практических задач.

Например, потребность выполнения такого расчета возникает в тех случаях, когда для устранения резонанса предлагается установка на лопасти вынесенных вперед балансиров. Имеются в виду относительно редкие случаи, когда постановка балансиров предлагается не для устранения флаттера, а для изменения частот собственных колебаний.

Конструктор учитывает связь между изгибными и крутильными колебаниями в том случае, когда расчет частот собственных колебаний лопасти не совпадает с экспериментом.

Выше были изучены свободные изгибные и крутильные колебания лопасти как две не связанные между собой независимые задачи. В реальной лопасти крутильные и изгибные колебания всегда связаны.

Рассмотрим связанные изгибно-крутильные колебания лопасти в пустоте, вызванные смещением центров тяжести сечений относительно оси жесткости лопасти и кинематической связью между изгибом и кручением через компенсатор взмаха. Используем методику расчета, построенную на основе метода трех моментов.

3.6.2. Методика расчета совместных колебаний

Воспользуемся следующими допущениями:

1. Ось жесткости лопасти есть прямая линия, совпадающая с осью осевого шарнира.
2. Плоскость наименьшей жесткости лопасти совпадает с плоскостью взмаха.
3. Лопасть совершает крутильные колебания вследствие крутильной деформации лопасти, деформации системы управления и изменения из-за этого угла установки лопасти, а также в результате кинематической связи через компенсатор взмаха с колебаниями лопасти в плоскости взмаха.

Эти допущения позволяют представить лопасть в виде невесомой свободной балки, разделенной на z участков, по краям которых с некоторым выносом $x_{ц.м i}$ расположены грузы массой m_i (рис. 65). Каждый груз, кроме массы m_i , сосредоточенной в центре масс соответствующего элемента лопасти, обладает некоторым моментом инерции $I_{ц.м i}$ относительно оси, проходящей через центр масс груза и параллельной упругой оси лопасти.

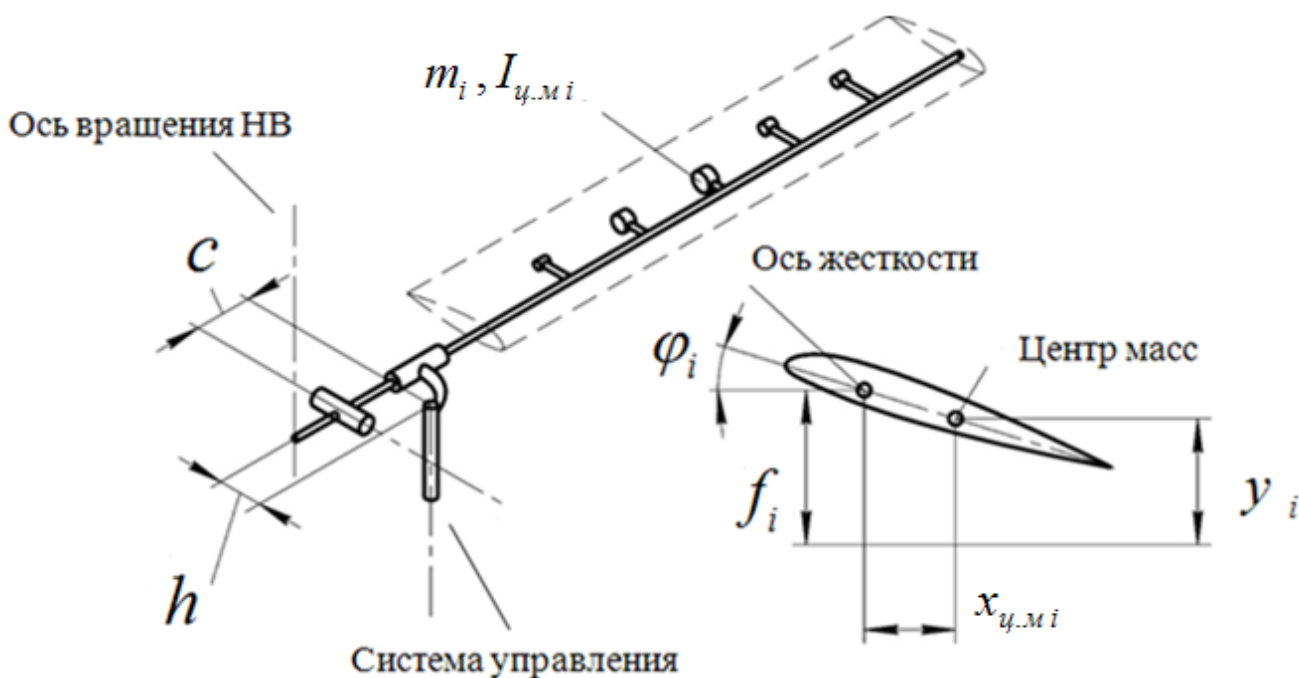


Рис. 65. Расчетная модель совместных изгибно-крутильных колебаний

Представим изгибную и крутильную жесткости в виде ступенчатых кривых таким образом, чтобы они оставались постоянными на протяжении каждого участка.

Наличие компенсатора взмаха приводит к кинематической связи между изгибными и крутильными колебаниями, которая может быть выражена формулой

$$\varphi_0 = \frac{M_{kp_0}}{c_{упр}} - \sigma_k \beta_0, \quad (150)$$

где φ_0 – угол поворота лопасти в осевом шарнире;

M_{kp_0} – крутящий момент относительно осевого шарнира;

$c_{упр}$ – жесткость системы управления углом установки лопасти, приведенная к осевому шарниру;

σ_k – компенсатор взмаха, равный

$$\sigma_k = c/h ;$$

c и h – координаты точки, где соединяются поводок и вертикальная тяга системы управления;

β_0 – угол поворота лопасти относительно горизонтального шарнира.

Кроме того, несколько меняются граничные условия в комле шарнирно закрепленной лопасти при ее колебаниях в плоскости тяги. Эти условия при наличии компенсатора взмаха могут быть записаны так:

$$M_0 = \sigma_k M_{kp_0}, \quad (151)$$

где M_0 , M_{kp_0} – изгибающий и крутящий моменты в комле лопасти.

Составим дифференциальные уравнения колебаний лопасти в плоскости взмаха с помощью метода трех моментов:

$$h_{i-1}M_{i-1} + g_iM_i + h_iM_{i+1} = \frac{Q_{i,i+1}}{N_{i,i+1}} - \frac{Q_{i-1,i}}{N_{i-1,i}}; \quad (152)$$

$$d_{i-1}M_{i-1} + c_iM_i + d_iM_{i+1} = b_{i-1}f_{i-1} + a_i f_i + b_i f_{i+1},$$

где

$$Q_{i,i+1} = -\sum_{i+1}^z m_i \ddot{y}_i; \quad (153)$$

$$Q_{i,i-1} = -\sum_i^z m_i \ddot{y}_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, z ;$$

f_i – вертикальные перемещения точек упругой оси лопасти (см. рис. 65);

y_i – вертикальное перемещение центров тяжести масс m_i .

Выражения для постоянных коэффициентов a_i , b_i , c_i , h_i и g_i приведены ранее (см. формулы (114) – (123)).

Перемещения упругой оси f_i и центров масс элементов лопасти y_i связаны соотношением

$$f_i = y_i + x_{y.m.i} \varphi_i, \quad (154)$$

где φ_i – углы поворота элементов лопасти вокруг ее упругой оси.

Для определения форм и частот изгибно-крутильных колебаний лопасти к соотношениям (152) нужно добавить уравнения крутильных колебаний.

Крутящий момент, если его считать постоянным по величине на протяжении каждого участка лопасти, может быть определен как

$$M_{кр\ i-1,i} = -\sum_i^z I_{y.m.i} \ddot{\varphi}_i - \omega^2 \sum_i^z I_{y.m.i} \varphi_i + \omega^2 \sum_i^z m_i x_{y.m.i} r_i f'_i + \sum_i^z m_i x_{y.m.i} \ddot{y}_i. \quad (155)$$

По величине крутящего момента находим крутильные деформации лопасти

$$\varphi_i = \sum_0^i \frac{M_{кр\ i-1,i} l_{i-1,i}}{GI_{кр\ i-1,i}} - \sigma_\kappa \beta_0, \quad (156)$$

где $GI_{кр\ i-1,i}$ – жесткость на кручение участка лопасти длиной, равной $l_{i-1,i}$, причем φ_0 вычисляем по формуле (150).

При использовании метода трех моментов учитываем граничные условия задачи. Для лопасти с шарнирным закреплением в комле первое и второе уравнения системы (152) записываем так:

$$\beta_0 + \sigma_\kappa g_0 M_{кр_0} + h_0 M_1 = \frac{Q_{01}}{N_{01}}; \quad (157)$$

$$\sigma_\kappa h_0 M_{кр_0} + g_1 M_1 + h_1 M_2 = \frac{Q_{12}}{N_{12}} - \frac{Q_{01}}{N_{01}}. \quad (158)$$

Таким образом, система уравнений, включающая в себя соотношения (152), (154), (155), (157) и (158), – это система дифференциальных уравнений изгибно-крутильных колебаний лопасти. Решение этой системы позволяет найти формы и частоты собственных изгибно-крутильных колебаний лопасти.

Если предположить, что входящие в дифференциальные уравнения (152), (154), (155) и (156) переменные изменяются по синусоидальному закону

$$y_i(t) = y_i \sin(pt),$$

то эти уравнения могут быть преобразованы в систему алгебраических уравнений относительно амплитудных значений переменных. В некоторые коэффициенты этих уравнений войдут в виде сомножителей параметры p^2 и $\gamma = \frac{\omega^2}{p^2}$. Если принять $p^2 = 1$, то эти уравнения могут быть переписаны так:

$$h_{i-1}\bar{M}_{i-1} + g_i\bar{M}_i + h_i\bar{M}_{i+1} = \frac{\bar{Q}_{i,i+1}}{N_{i,i+1}} - \frac{\bar{Q}_{i-1,i}}{N_{i-1,i}}; \quad (159)$$

$$d_{i-1}\bar{M}_{i-1} + c_i\bar{M}_i + d_i\bar{M}_{i+1} = b_{i-1}u_{i-1} + a_iu_i + b_iu_{i+1};$$

$$\bar{M}_{kp_{i-1,i}} = (1-\gamma) \sum_i^z I_{y..m_i} \varphi_i + \gamma \sum_i^z m_i x_{y..m_i} r_i f'_i - \sum_i^z m_i x_{y..m_i} y_i; \quad (160)$$

$$\mathcal{G}_i = \sum_0^i \frac{\bar{M}_{kp_{i-1,i}} l_{i-1,i}}{GI_{kp_{i-1,i}}} - \sigma_\kappa \bar{\beta}_0; \quad (161)$$

$$v_i = u_i - x_{y..m_i} \mathcal{G}_i, \quad (162)$$

где

$$\bar{Q}_{i,i+1} = \sum_{i+1}^z m_i \bar{y}_i;$$

$$\bar{Q}_{i,i-1} = \sum_i^z m_i \bar{y}_i.$$

Входящие в эти выражения величины подчинены следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} y_i &= p^2 v_i; \\ f_i &= p^2 u_i; \\ \varphi_i &= p^2 \mathcal{G}_i; \\ M_i &= p^2 \bar{M}_i; \\ M_{kp_{i-1,i}} &= p^2 \bar{M}_{kp_{i-1,i}}; \\ \beta_0 &= p^2 \bar{\beta}_0. \end{aligned} \quad (163)$$

Систему уравнений (159), (160), (161) и (162) удобно решать методом последовательных приближений. При этом в каждом приближении необходимо уточнять параметр γ под заданную в расчете угловую скорость вращения несущего винта ω .

Последовательные приближения выполняют в таком порядке.

Зададимся некоторой величиной параметра γ и произвольной формой нулевого приближения функций $y_{i,0}$ и $\varphi_{i,0}$.

Взятые в качестве нулевого приближения функции должны быть каким-нибудь образом нормированы, например

$$y_z = 1.$$

После этого по формуле (154) получаем функцию $f_{i,0}$. Из уравнения (160) определяем величину \bar{M}_{kp_0} , необходимую для решения системы уравнений (159). Одновременно вычисляем $\bar{M}_{kp_{i-1,i}}$.

После решения системы уравнений (159) и вычисления u_i из первого уравнения этой системы находим

$$\bar{\beta}_0 = \frac{\bar{Q}_{01}}{N_{01}} - h_0 \bar{M}_1 - \sigma_\kappa g_0 \bar{M}_{kp_0}, \quad (164)$$

затем с помощью (161) – \mathfrak{g}_i , а по выражению (162) – значения v_i , причем для них существует дополнительное условие $v_0 = 0$.

Частоту собственных колебаний определяем из условия нормирования на основании первого соотношения (163)

$$p^2 = \frac{1}{\nu_z}. \quad (165)$$

После этого по соотношениям (163) вычисляем функции y_i и φ_i , которые используем для следующего приближения, выполняемого в том же порядке. Одновременно уточняем и параметр γ .

Такой метод последовательных приближений приводит к определению частоты и формы низшего тона собственных колебаний. Для нахождения высших тонов применяем условие ортогональности, которое для изгибно-крутильных колебаний имеет следующий вид:

$$\sum_0^z [m_i y_i^{(j)} y_i^{(m)} + I_{u..m i} \varphi_i^{(j)} \varphi_i^{(m)}] = 0. \quad (166)$$

Здесь индексом j отмечена форма искомого тона, а индексом m – формы ранее найденных низших тонов.

Полагая, что

$$\begin{aligned} y_i^{(j)} &= p_j^2 \left[\nu_i - \sum_{m=0}^{m=j-1} C_m y_i^{(m)} \right]; \\ \varphi_i^{(j)} &= p_j^2 \left[\mathfrak{g}_i - \sum_{m=1}^{m=j-1} C_m \varphi_i^{(m)} \right], \end{aligned} \quad (167)$$

и подставляя (167) в условие (166), находим

$$C_m = \frac{\sum_{i=0}^z [m_i \nu_i y_i^{(m)} + I_{u..m i} \mathfrak{g}_i \varphi_i^{(m)}]}{\sum_{i=0}^z [m_i [y_i^{(m)}]^2 + I_{u..m i} [\varphi_i^{(m)}]^2]}. \quad (168)$$

Результаты расчета совместных изгибно-крутильных форм и частот колебаний для вращающейся лопасти показаны на рис. 66 – 71.

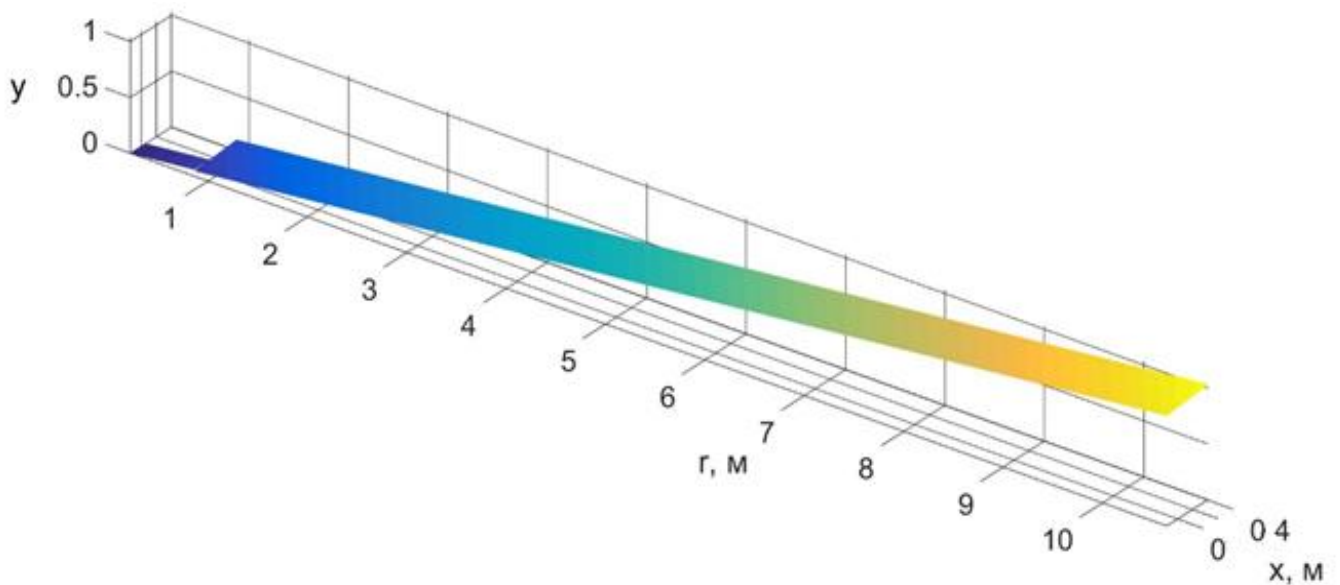


Рис. 66. Нулевая форма колебаний ($p_0 = 3,253$ Гц)

Из рис. 66 видно, что лопасть совершает маховые колебания относительно ГШ как твердое тело.

Первый тон упругих колебаний (рис. 67) характеризуется в основном изгибными деформациями лонжерона, на радиусе $r \approx 8$ м имеется один узел колебаний.

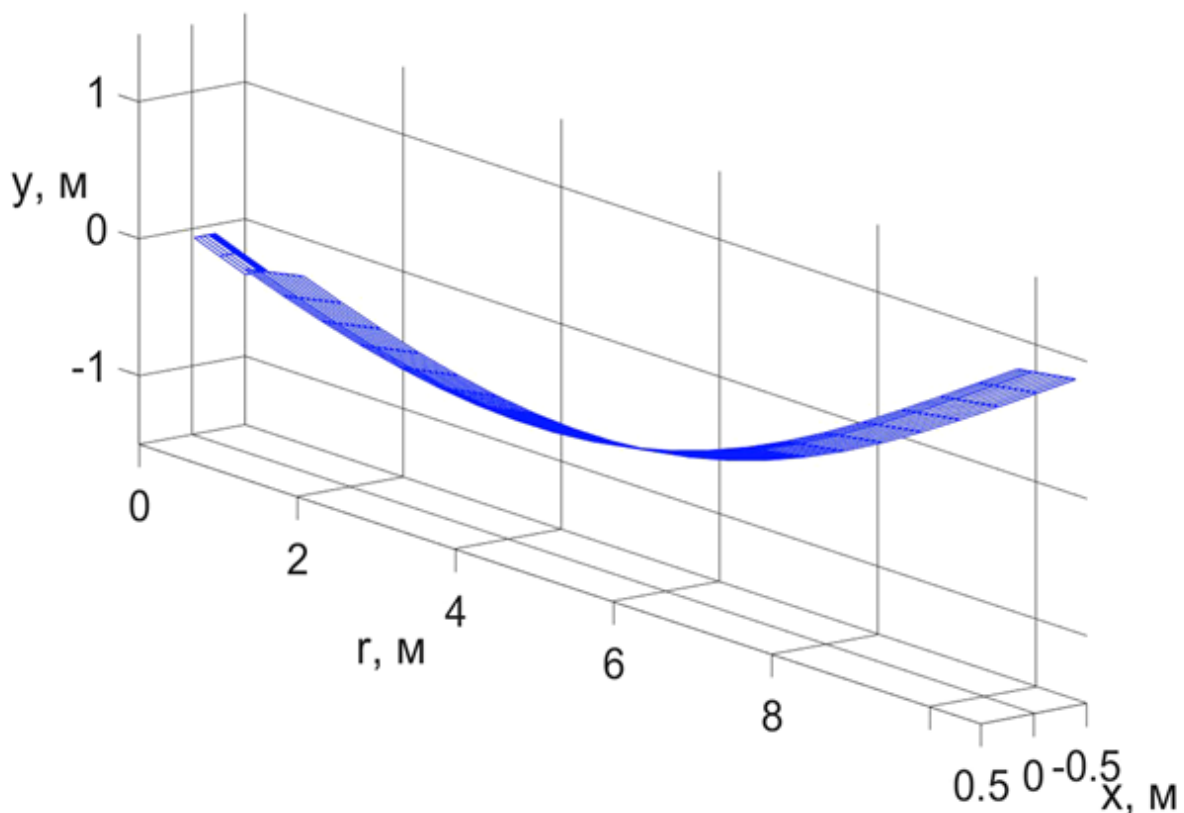


Рис. 67. Первая форма колебаний ($p_1 = 9,180$ Гц)

На рис. 68 показана вторая форма колебаний, это крутильная форма, деформации изгиба практически не видны, лопасть закручивается, причем углы поворота сечений связаны в основном с деформацией проводки управления.

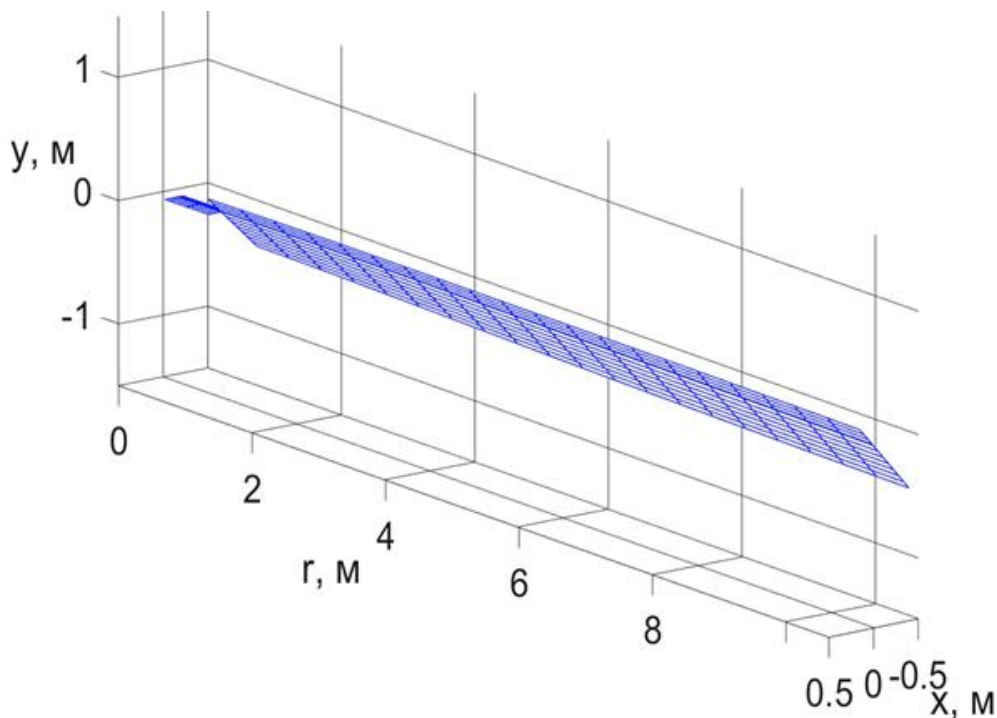


Рис. 68. Вторая форма колебаний ($p_2 = 12,72$ Гц)

Третью форму колебаний лопасти (рис. 69) можно считать изгибной формой, деформации кручения сравнительно невелики, наблюдаются две узловые точки при изгибе.

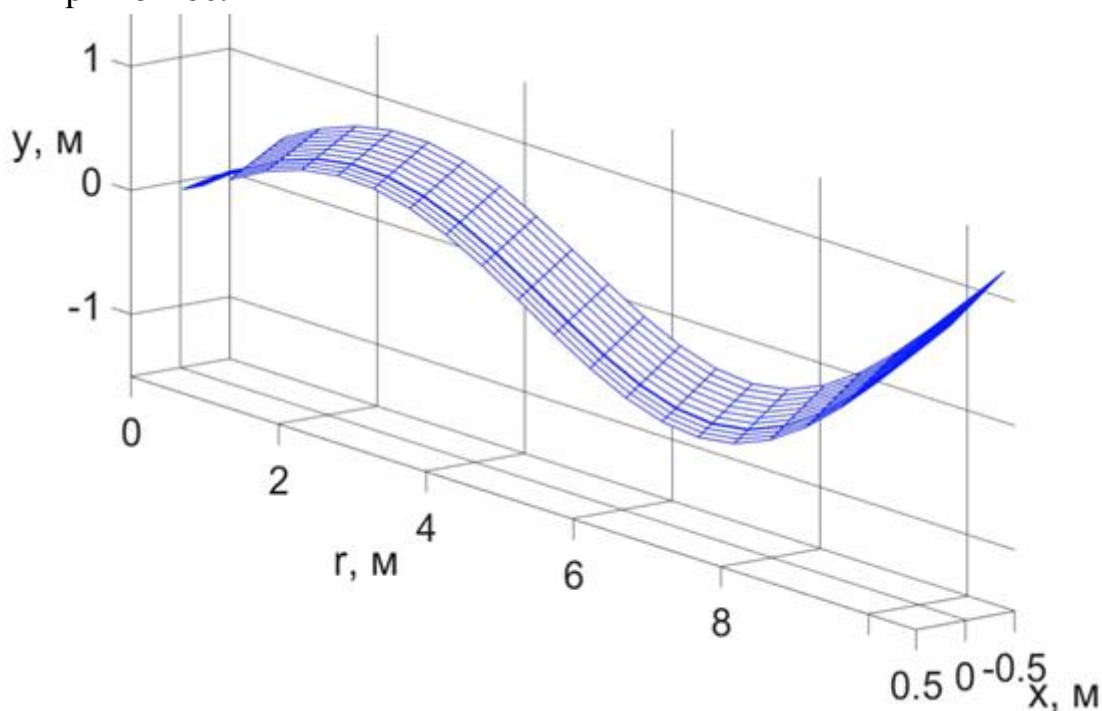


Рис. 69. Третья форма колебаний ($p_3 = 18,17$ Гц)

Четвертая форма колебаний сопровождается изгибом и кручением лопасти (рис. 70).

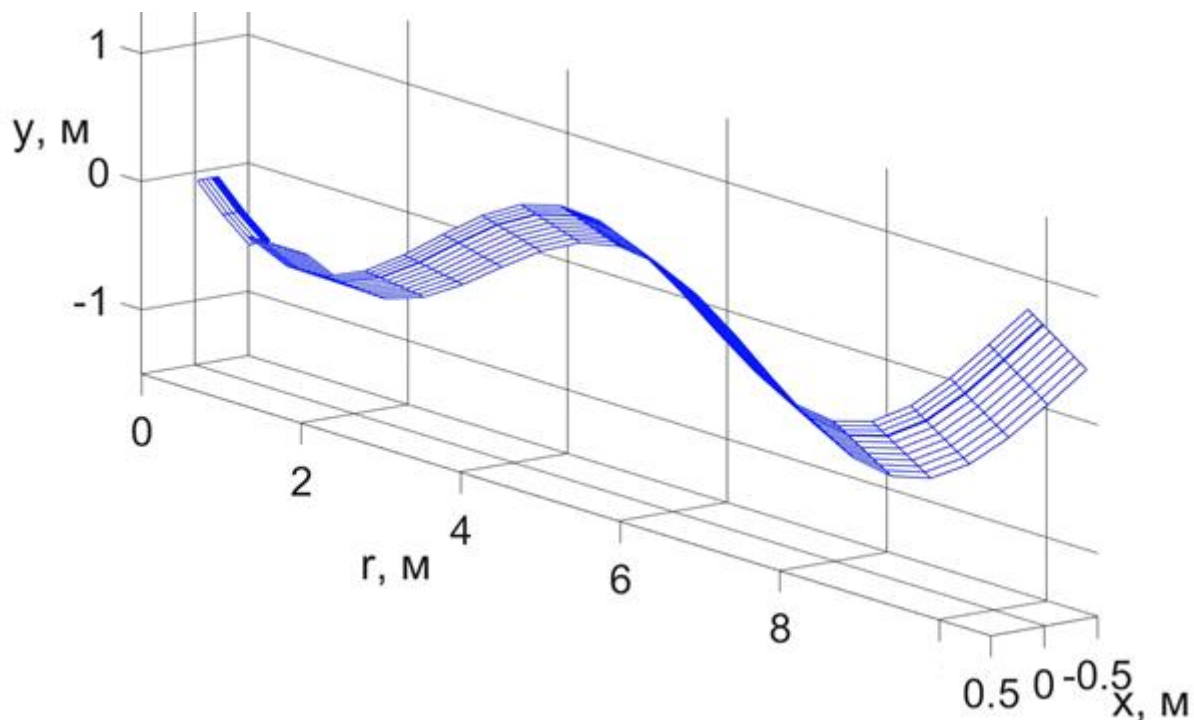


Рис. 70. Четвертая форма колебаний ($p_4 = 30,21$ Гц)

На рис. 71 показана изгибная форма колебаний, имеются узловые точки.

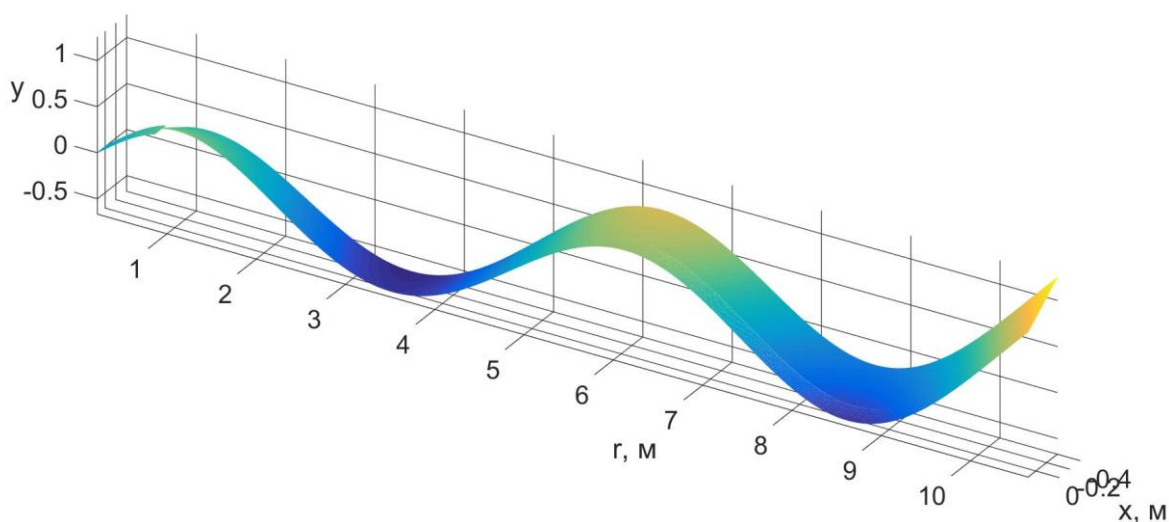


Рис. 71. Пятая форма колебаний ($p_5 = 46,19$ Гц)

4. РЕЗОНАНСНАЯ ДИАГРАММА ЛОПАСТИ НВ

В процессе проектирования лопасти проводят расчеты собственных колебаний для исключения возможных резонансов с гармониками внешних сил.

Даже небольшие по величине амплитуды переменных аэродинамических сил могут вызвать значительные по величине переменные напряжения. Гармонические составляющие аэродинамических сил, действующих на лопасть в полете, как показали исследования, имеют существенную величину до гармоник не выше восьмой. Более высокие гармоники, как правило, настолько малы по величине, что их можно не принимать во внимание.

Построенные совместно на одном графике частоты собственных колебаний вращающейся лопасти и внешней нагрузки называются резонансной диаграммой лопасти.

Главное практическое значение резонансных диаграмм заключается в возможности оценить с их помощью качество конструкции лопасти с точки зрения уровня переменных напряжений и ресурса. Кроме собственных частот колебаний лопасти

$$p_{cj} = p_j(\omega) \quad (169)$$

на графике проводят прямые

$$p_{vi} = i\omega, \quad i = 1, 2, \dots \quad (170)$$

зависимости частоты гармоники аэродинамической нагрузки p_{vi} от частоты вращения винта ω ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$ – порядковый номер гармоники аэродинамической силы).

Действительно, на установившемся режиме полета аэродинамическая нагрузка в сечении лопасти изменяется по некоторому периодическому закону с периодом $T = 2\pi/5\omega$. Повторяется картина обтекания лопастей при повороте пятилопастного винта на угол $\Delta\psi = 360/5$ (рис. 72).

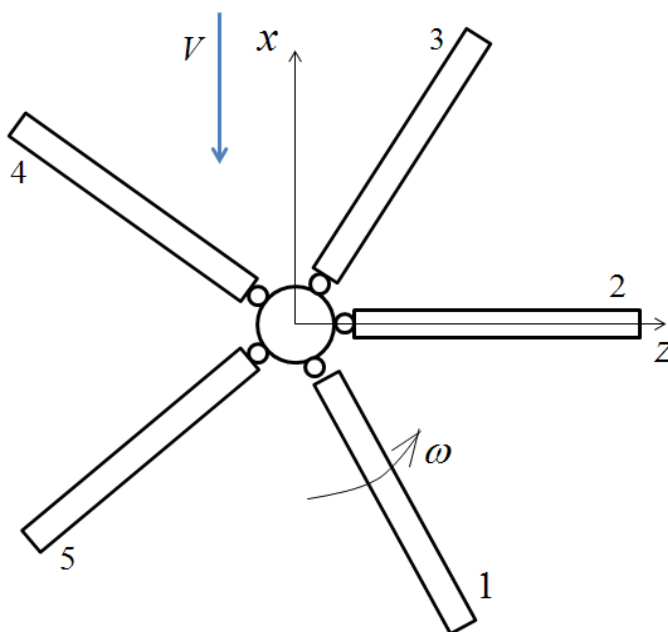


Рис. 72. Повторение картины обтекания лопастей при повороте пятилопастного винта на угол $\Delta\psi = 360/5$

Это дает возможность представить нагрузку в виде ряда – суммы гармоник:

$$w = w^{(0)} + \sum_i w^{(ic)} \cos i\omega t + \sum_i w^{(is)} \sin i\omega t,$$

где $w^{(0)}$ – величина постоянной составляющей нагрузки;

$w^{(ic)}$ и $w^{(is)}$ – амплитуды i -й гармоники нагрузки.

Видно, что периодическое возмущение на винт изменяется с частотами, кратными частоте вращения винта ω .

В работе на основе вычислительного эксперимента и моделирования собственных изгибных колебаний вращающейся лопасти определен диапазон параметров, в котором отсутствует резонанс с восемью гармониками аэродинамических сил.

В качестве параметров использованы масса противофлаттерного груза $m_{нфг}$ и его длина $L_{нфг}$.

На рис. 73 показаны частоты первых трех тонов собственных изгибных колебаний и восемь первых гармоник внешней аэродинамической силы. В эксплуатационном диапазоне оборотов пересечений графиков нет, следовательно, резонансы не возникают.

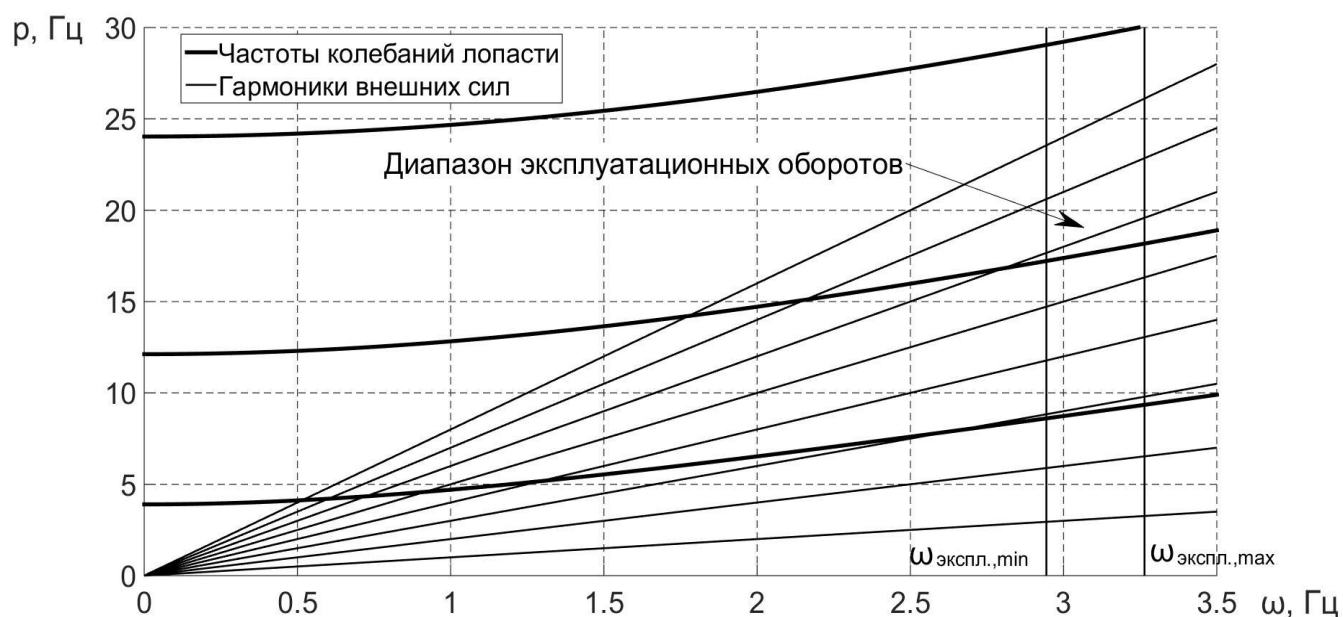


Рис. 73. Резонансная диаграмма изгибных колебаний вращающейся лопасти

Для оценки влияния резонанса на ресурс необходимо обратить внимание на частоту вращения винта, при которой наблюдается пересечение кривых (169) и

(170). Для каждого вертолета устанавливают предельные значения частот вращения винта, допустимые в полете.

При частоте вращения $\omega < \omega_{\text{экспл. min}}$ винт работает только кратковременно – при раскрутке и остановке. Эти режимы работы составляют лишь незначительную долю общего срока службы. Поэтому резонансные точки, расположенные вне зоны рабочих частот вращения, практического значения не имеют. Если же резонанс возникает в зоне эксплуатационных частот вращения винта в полете или достаточно близко от нее, то увеличение напряжений из-за резонанса неизбежно скажется на ресурсе лопастей. Как показывает опыт, такие лопасти имеют неприемлемо низкий ресурс.

Исключение резонансов в диапазоне рабочих частот вращения винта нельзя рассматривать как достаточное условие получения большого ресурса. Величина ресурса определяется комплексом различных факторов. Однако исключение резонансов в диапазоне рабочих частот является, конечно, необходимым условием.

Значения собственных частот зависят от массовых и жесткостных характеристик лопасти, изменяя которые конструктор может влиять на резонансную диаграмму. Практически возможности конструктора в известной мере ограничены. Так, например, простое увеличение площади лонжерона приведет к увеличению жесткости, но при этом возрастет и погонная масса, следовательно, собственные частоты увеличатся в меньшей мере. При одной и той же погонной массе лонжерона можно получить различные значения жесткости, располагая соответствующим образом материал в сечении. Однако высота лонжерона ограничена профилем лопасти, выбираемым из соображений, связанных с обеспечением приемлемых аэродинамических характеристик. Поэтому возможности разнесения материала от нейтральной оси ограничены и требуют исследования.

В процессе проектирования часто возникает вопрос о допустимых значениях тех или иных параметров. На рис. 74 показано влияние массы и длины противофлаттерного груза на количество резонансов в эксплуатационном диапазоне.

Как видно, при некоторых значениях массы и длины противофлаттерного груза появляется один или два резонанса в эксплуатационном диапазоне частот вращения НВ. Эта информация принципиально важна в процессе проектирования вертолета, когда приходится варьировать значения конструктивных параметров.

Резонансы в эксплуатационном диапазоне частот вращения несущего винта должны быть исключены уже на этапе проектирования лопасти. Резонансы до эксплуатационного диапазона частот, так называемые «проходные», считаем

неопасными, поскольку при быстрой раскрутке несущего винта амплитуда колебаний остается небольшой.

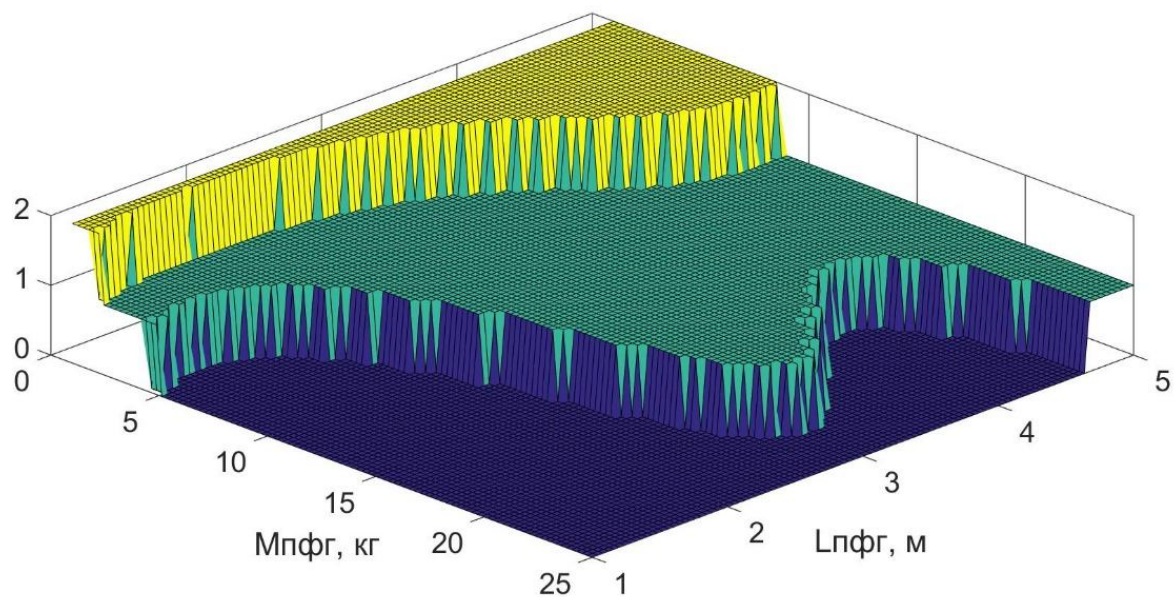


Рис. 74. Определение допустимых значений параметров противофлаттерного груза

На рис. 75 показано влияние массы противофлаттерного груза и изгибной жесткости лопасти в плоскости взмаха на количество резонансов в эксплуатационном диапазоне частот вращения.

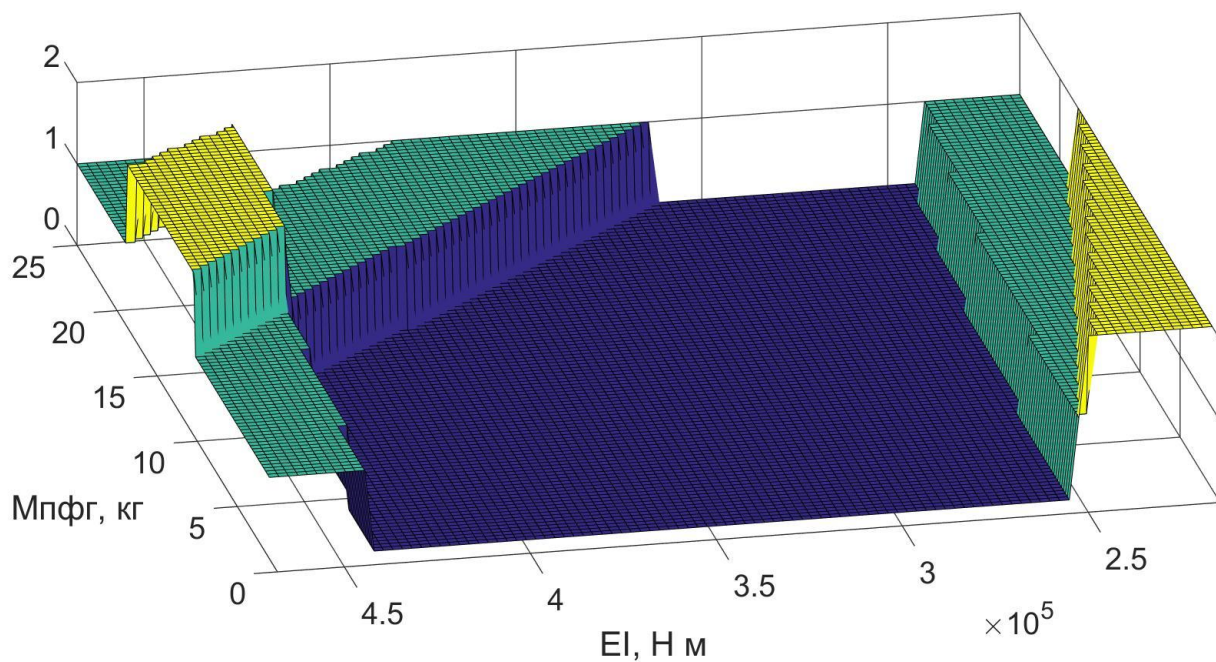


Рис. 75. Определение допустимых значений массы противофлаттерного груза и жесткости лопасти

На рис. 75 показан диапазон значений параметров, при которых в эксплуатационном диапазоне частот вращения НВ присутствуют от одного до двух резонансов.

Приведем резонансную диаграмму и проанализируем влияние массы и длины противофлаттерного груза на количество резонансов в эксплуатационном диапазоне для совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти. Результаты показаны на рис. 76 – 77.

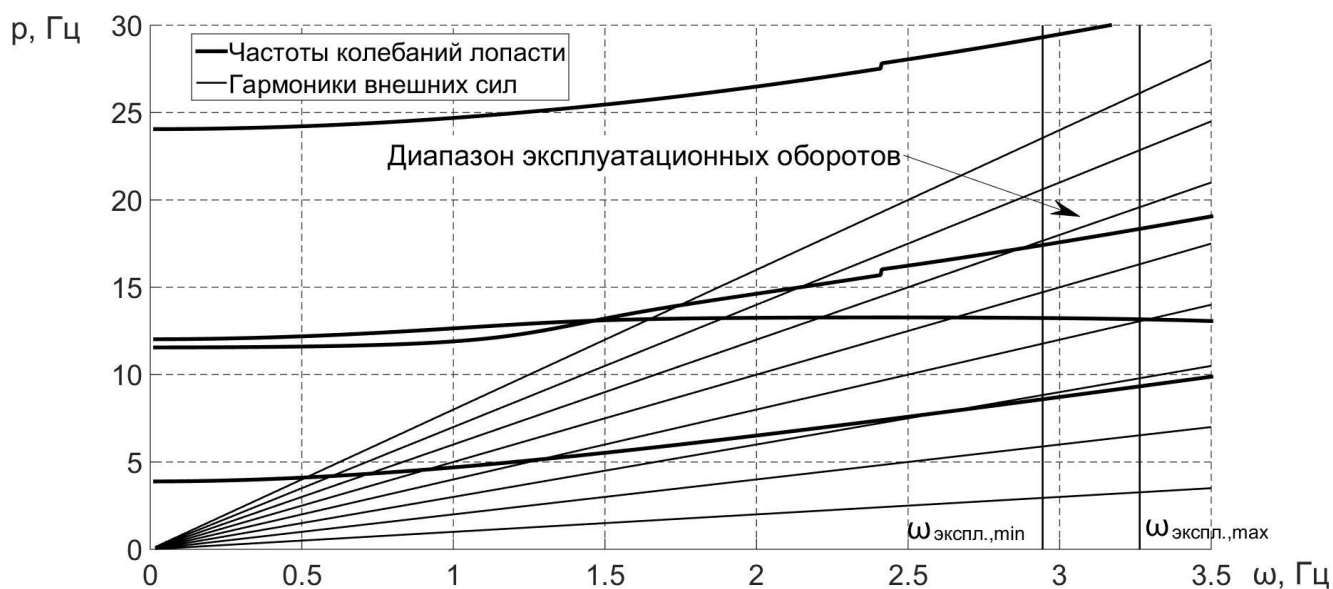


Рис. 76. Резонансная диаграмма совместных изгибно-крутильных колебаний вращающейся лопасти

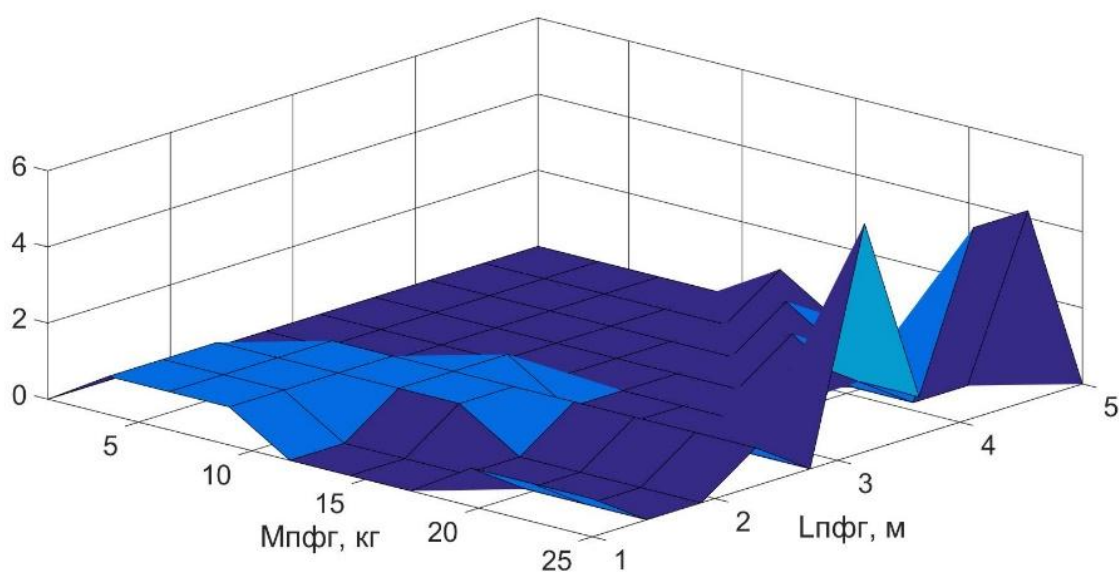


Рис. 77. Определение допустимых значений параметров противофлаттерного груза при совместных изгибно-крутильных колебаниях

Из рис. 74 и 77 видно, что при учете совместных изгибно-крутильных колебаний наблюдается существенное изменение частот собственных колебаний и количество резонансов в эксплуатационном диапазоне частот вращения НВ.

Наличие большого количества резонансов (до шести) (см. рис. 77) объясняется влиянием центробежных сил инерции, которые при определенных частотах вращения могут устранить возможность колебательного процесса (см. формулы (155) и (160)). В таком случае частота одного из тонов колебаний стремится к нулю (рис. 78).

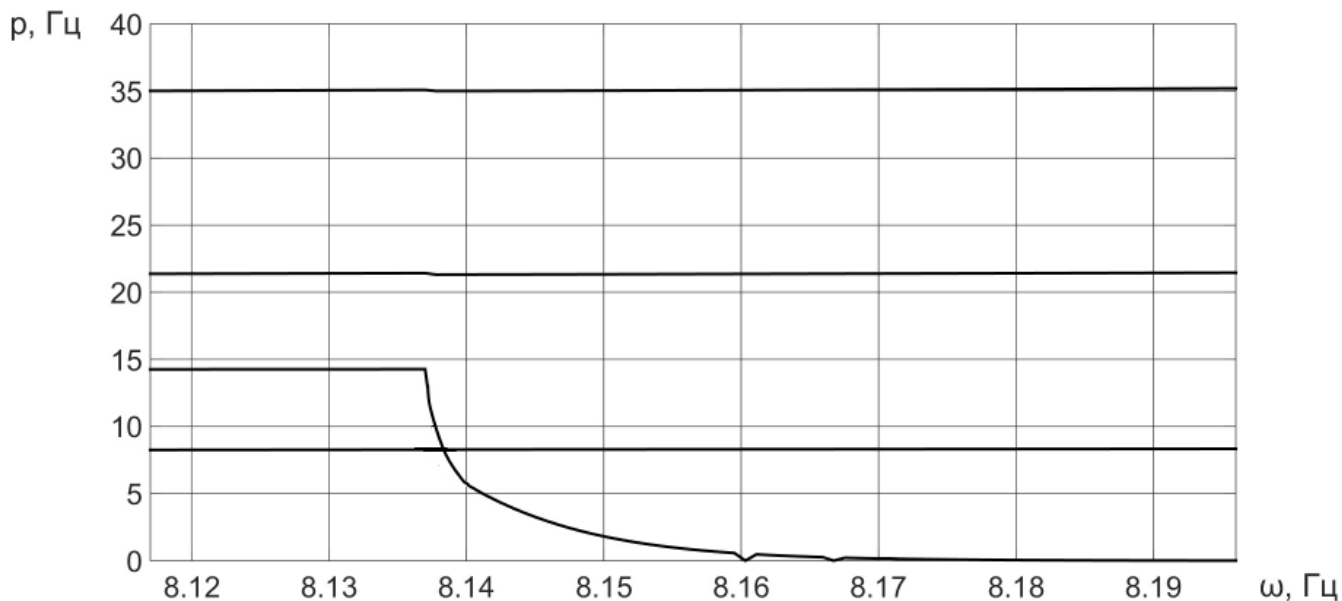


Рис. 78. Влияние частоты вращения НВ на частоты совместных изгибно-крутильных колебаний

Таким образом, расчет и исследование динамических характеристик конструкции (форм и частот собственных колебаний) – важные этапы для формирования моделей аэроупругости, а также исследования динамики и нагружения конструкции вертолета в процессе эксплуатации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Авиационные правила. Нормы летной годности винтокрылых аппаратов транспортной категории [Текст]. – М. : ОАО "Авиаиздат", 2003. – Ч. 29. – 136 с.
- Вертолет Ми-8. Инструкция по технической эксплуатации [Текст] : в 4 кн. – М. : Машиностроение, 1981. – Кн. 1 : Планер и силовая установка. – 280 с.
- Вертолёты (расчёт и проектирование) [Текст] : в 2 кн. / М. Л. Миль, А. В. Некрасов, А. С. Браверман и др. – М. : Машиностроение, 1966. – Кн. 1 : Аэродинамика. – 457 с.
- Вертолёты (расчёт и проектирование) [Текст] : в 2 кн. / М. Л. Миль, А. В. Некрасов, А. С. Браверман и др. – М. : Машиностроение, 1966. – Кн. 2 : Колебания и динамическая прочность. – 424 с.
- Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний [Текст] / В. Л. Бидерман. – М. : Высш. шк., 1972. – 416 с.
- Бисплингхофф, Р. Л. Аэроупругость [Текст] / Р. Л. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Л. Хелфмен. – М. : Изд-во иностр. лит., 1958. – 799 с.
- Образцов, И. Ф. Строительная механика летательных аппаратов [Текст] / И. Ф. Образцов. – М. : Машиностроение, 1986. – 535 с.
- Михеев, Р. А. Прочность вертолетов [Текст] / Р. А. Михеев. – М. : Машиностроение, 1984. – 280 с.
- Машиностроение. Энциклопедия [Текст] : в 40 т. / гл. ред. В. Г. Дмитриев. – М. : Машиностроение, 2002. – Т. IV–21: Самолеты и вертолеты. – Кн. 1 : Аэродинамика, динамика полета и прочность. – 800 с.
- Онищенко, В. М. Расчет резонансной диаграммы лопасти несущего винта в процессе проектирования [Текст] / В. М. Онищенко, В. С. Рябов // Открытые информационные и компьютерные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского "Харьков. авиац. ин-т". – Вып. 68. – Харьков, 2016. – С. 141 – 145.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Летно-технические данные вертолета и несущего винта.....	5
2. Требования норм прочности к лопасти НВ.....	14
3. Собственные колебания лопастей несущего винта.....	17
3.1. Допущения при расчетах динамических характеристик лопасти.....	17
3.2. Модели лопасти, применяемые в расчете.....	20
3.3. Частоты собственных колебаний жесткой лопасти в плоскостях взмаха и качания.....	21
3.4. Изгибные колебания лопасти.....	25
3.4.1. Дифференциальное уравнение изгиба лопасти в поле центробежных сил при колебаниях в плоскости взмаха.....	25
3.4.2. Свободные изгибные колебания невращающейся однородной лопасти.....	28
3.4.3. Расчет собственных характеристик невращающейся лопасти на основе метода дискретизации.....	52
3.4.4. Расчет собственных характеристик невращающейся лопасти на основе метода последовательных приближений.....	58
3.4.5. Расчет форм и частот собственных колебаний лопасти в поле центробежных сил.....	70
3.5. Крутильные колебания лопасти.....	81
3.5.1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний лопасти....	81
3.5.2. Определение форм и частот собственных колебаний лопасти на кручение.....	85
3.6. Совместные изгибно-крутильные колебания лопасти.....	89
3.6.1. Связь между изгибными и крутильными колебаниями.....	89
3.6.2. Методика расчета совместных колебаний.....	90
4. Резонансная диаграмма лопасти НВ.....	97
Библиографический список.....	104

Навчальне видання

Онищенко Володимир Михайлович

**РОЗРАХУНОК РЕЗОНАНСНОЇ ДІАГРАМИ ЛОПАТІ НЕСУЧОГО
ГВИНТА ТРАНСПОРТНОГО ВЕРТОЛЬОТА**

(Російською мовою)

Редактор В. І. Філатова

Зв. план, 2017

Підписано до видання 02.06.2017

Ум. друк. арк. 5,9. Обл.- вид. арк. 6,62. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

[http:// www.khai.edu](http://www.khai.edu)

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
сер. ДК № 391 від 30.03.2001

